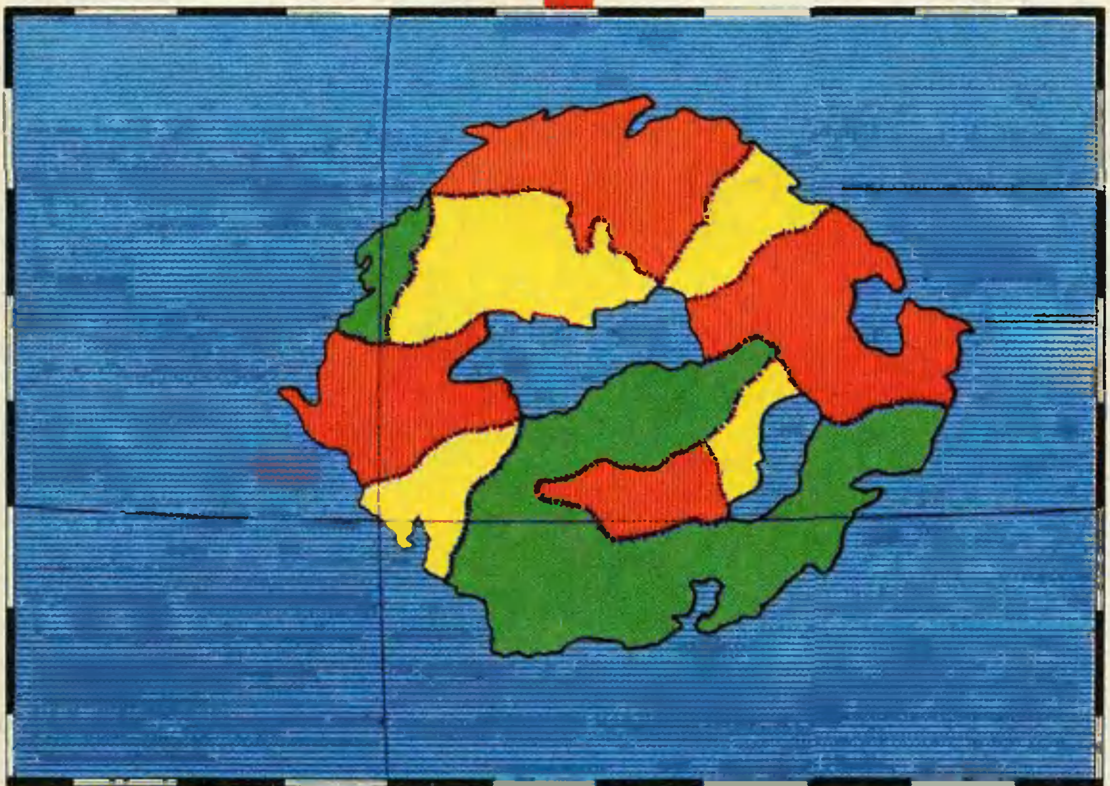
ISSN 0130-2221

КВАНТ

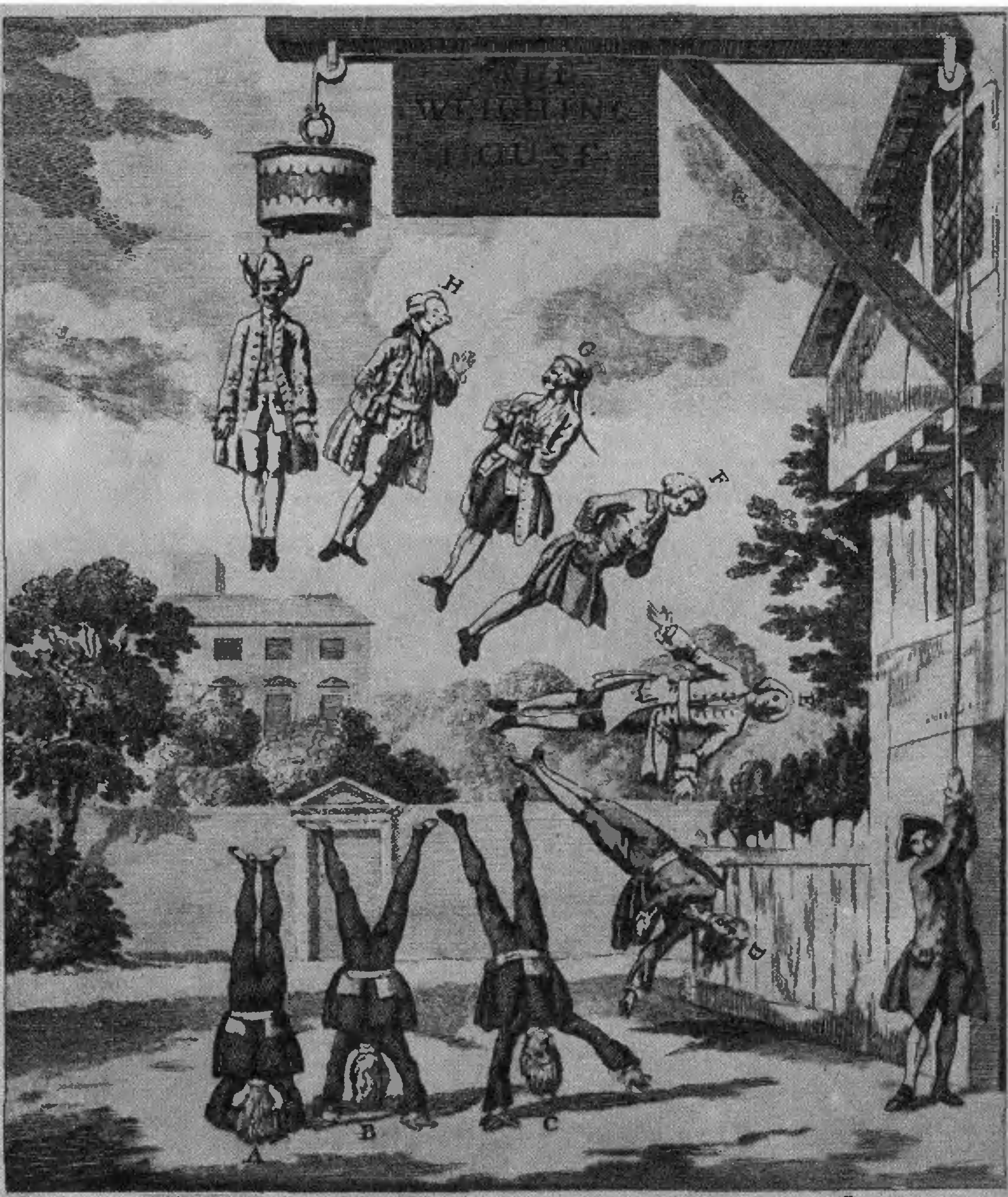
Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Остров четырех красок

1988



A. absolute Gravity. B. Conatus against absolute Gravity. C. partial Gravity.
D. comparative Gravity. E. horizontal, or good Sense. F. Wit. G. comparative Levity
or Coxcomb. H. partial Levity, or pert Fool. I. absolute Levity, or Stark Fool.

Квант

1988
7

Основан в 1970 году

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

1 *Любую ли карту на плоскости можно правильно раскрасить четырьмя красками — так, как это сделано, например, для острова, изображенного на нашей обложке? («Правильно» — это так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один цвет.) В 1976 году Аппелем и Хакеном была доказана теорема, дающая утвердительный ответ на этот вопрос. А вот в статье М. Гарднера «Остров пяти красок» вы столкнетесь с фантастической историей, «опровергающей» эту знаменитую теорему.*

2 *Трудно поверить, но 250 лет назад теория тяготения Ньютона вызывала недоверие, споры и даже насмешки. Свидетельство тому — карикатура, появившаяся при жизни Ньютона. А в нашем веке были обнаружены явления поистине космического масштаба, связанные с законом всемирного тяготения. Об этом читайте в статье А. Д. Чернина.*

3 *Шахматная страничка.*

4 *«Рецепт» склейки флексора Клауса Штеффена. Что такое флексор (а также флексагон и флексман) вы узнаете, познакомившись со статьей А. А. Панова.*

ЯКОБ ШТЕЙНЕР

(из истории геометрии)

Доктор физико-математических наук
И. М. ЯГЛОМ

Во второй половине XVIII и в начале XIX века в Швейцарии жил замечательный педагог-гуманист Иоганн Генрих Песталоцци (1746—1827). Ныне Песталоцци во всем мире считается основоположником теории начального обучения детей, идеи о соединении обучения с производительным трудом. Рассказывать о нем можно было бы долго — но не Песталоцци является здесь нашим героем. Свои идеи Песталоцци проверял и реализовывал в основанной им превосходной начальной школе-интернате для детей бедняков. Сотрудники Песталоцци разъезжали по всей Швейцарии, отбирая будущих учеников и уговаривая (часто это было труднее всего) их родителей послать детей в школу.

В 1814 году один из посланных Песталоцци сотрудников встретил в горах Швейцарии молодого пастуха Якоба Штейнера, сына бедного крестьянина. Якоб в это время едва умел читать и писать, однако самоучкой он приобрел некоторые познания в математике и в особенно увлекавшей его тогда астрономии. Эти знания и интересы молодого пастуха поразили сотрудника Песталоцци, который стал убеждать Штейнера-отца отказаться от услуг ценного помощника и отправить сына в школу учиться. С большим трудом ему удалось до-

Автор этой статьи Исаак Моисеевич Яглом умер 17 апреля этого года. Читателям «Кванта» хорошо известно это имя: И. М. Яглому принадлежит такое большое число популярных книг по математике, что, вероятно, каждый интересующийся математикой читал что-то написанное им. В разные годы на страницах журнала было опубликовано более десяти его статей. Более сорока лет жизни он верно служил популяризации математики.

Исаак Моисеевич Яглом родился в 1921 году. По счастливой случайности, когда он учился в старших классах, замечательные математики с энтузиазмом организовывали в Московском университете первые математические кружки и олимпиады. В 1938 году Яглом получил первую премию на олимпиаде, а на следующий год, став студентом, И. М. Яглом оказался одним из самых активных руководителей кружка. Еще до войны Д. О. Шклярский, погибший на фронте, задумал создать сборник кружковских задач и начал собирать материал. Замысел Шклярского был завершен после войны, причем большая часть работы была выполнена Исааком Моисеевичем, ставшим основным хранителем «кружковской мудрости». Трехтомник «Задачи и теоремы элементарной математики» Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома на долгие годы становится основным руководством для ребят, интересующихся математикой. Эта книга открыла серию «Библиотека математического кружка». В этой серии вышло еще несколько книг И. М. Яглома.

Для Яглома важно, что уже в школьные годы ребята могут не только решать изолированные красивые задачи, но и, работая над хорошо спланированными сериями задач, они могут непрерывно переходить к профессиональной математической деятельности. На это ориентированы такие книги «Библиотеки» как «Выпуклые фигуры» (написана совместно с В. Г. Болтянским), «Неэлементарные задачи в элементарном изложении» (совместно с А. М. Ягломом), двухтомник «Геометрические преобразования».

В последние годы жизни Исаака Моисеевича остро волновали гуманитарные аспекты математики: он много пишет о ее истории, связях с естественными и гуманитарными науками, ее месте в жизни общества. В этой деятельности в полной мере проявились высочайшая культура, широкая эрудиция, которые поражали каждого, кто имел счастье быть лично знаком с Исааком Моисеевичем.

Предлагаемая вниманию читателя статья посвящена Якобу Штейнеру, крупнейшему представителю «золотого века» немецкой геометрии. Очень характерно, что внимание И. М. Яглома привлекала эта колоритная, противоречивая фигура. В Штейнере уживались фантастическая геометрическая интуиция и необычайный консерватизм, выражавшийся в категорическом неприятии координат и комплексных чисел в геометрии, которые, как он был искренне уверен, ведут к уничтожению истинного духа геометрии.

биться этого — и 18-летний Штейнер (он родился в 1796 году) навсегда покинул родную деревню. Вскоре Якоб оказался в городке Иверден вблизи Берна, в руководимой Песталоцци школе-интернате, куда Песталоцци принял его бесплатно: ведь ни за учебу, ни за питание, ни за проживание Штейнеру платить было нечем.

У Песталоцци Штейнер провел 4 года. Сначала он учился в школе, а затем сам преподавал в ней математику. Однако Песталоцци быстро понял, что талант Штейнера заслуживает лучшего применения. Следуя настоятельным советам Песталоцци, Штейнер в 1818 году переезжает в Германию, в город Гейдельберг — ближайший к Ивердену крупный университетский центр.

Песталоцци рассчитывал, что Штейнер закончит Гейдельбергский университет и затем сам выберет свой путь; однако в полной мере эти надежды не осуществились. Песталоцци выдал Штейнеру некоторую сумму денег на дорогу и на первое обзаведение в чужом городе. Но дальше Штейнеру предстояло самому обеспечивать себя хлебом насущным. Никакой профессией, кроме профессии учителя математики, Штейнер не владел. Он вынужден был перегружать себя частными уроками, за которые платили ему мало: ведь он не имел никакого серьезного образования. Эти глубоко ненавидимые Штейнером уроки не давали ему возможности систематически посещать университет. За три года пребывания в Гейдельберге он сумел прослушать лишь несколько университетских курсов (что, впрочем, тоже было не мало, учитывая его уровень подготовки). Кроме того, в Гейдельберге Штейнер приобрел первые математические знакомства, ибо выдающиеся таланты швейцарца сразу же бросались в глаза.

В 1821 году друзья сообщили Штейнеру об открывшейся в Берлине вакансии преподавателя математики в одной из столичных гимназий, и он сразу же пустился в путь. Положение гимназического учителя давало бы ему регулярный заработок. Но для занятия столь желанного места ему предстояло еще сдать экзамены, а их результаты никак не могли особенно воодушевить руководство гимназии.

Прежде всего у кандидата на должность учителя спросили, знаком ли он с курсом гимназии. На этот вопрос Штейнер ответил кратко: «Нет, не знаком». А что еще он мог сказать? Ведь в прусской гимназии проходились латынь и древнегреческий язык, с которыми сын швейцарского крестьянина был знаком не больше, чем мы с вами, мой читатель. Но и с экзаменом по математике дело обстояло не слишком благополучно: Штейнер показал обширные и глубокие знания по геометрии, но более чем скромные — по алгебре и тригонометрии, а в области математического анализа у него оказались зияющие пробелы. Однако бросающиеся в глаза выдающиеся геометрические способности молодого швейцарца и представленные им лестные характеристики сделали свое дело: Штейнеру было разрешено два года преподавать математику во всех классах, кроме выпускного. Он должен был за это время сдать экзамены по курсу гимназии (их Штейнер так никогда и не сдал) и дополнительный экзамен по математике (его Штейнер сдал значительно позже).

В средней школе Штейнер проработал 14 лет. Стало это возможным лишь после открытия в Берлине реального училища, в котором увеличено было число часов на математику и на естественные науки, но не преподавались древние языки (а следовательно, их знание не требовалось и от учителей училища). Однако, несмотря на то, что организатором и директором училища являлся также ученик Песталоцци, Штейнер сначала и здесь числился только помощником учителя. Лишь после сдачи дополнительных экзаменов (в 1829 году) он стал старшим учителем. Увы! Приходится признать, что раздражительный и невнимательный к людям Штейнер учителем был неважным. Он с увлечением занимался с одаренными учениками, придумывая для них яркие индивидуальные задания (в первую очередь — по геометрии, см. задачи 1,

Якоб Штейнер (1796—1863).

2, 6 и Приложение). Остальные же школьники только сердили его: отсутствие у учащегося способностей и интереса к математике Штейнер просто не мог понять. Иногда, когда становилось совсем уж невмоготу, он даже бросал регулярную работу в школе и вновь, как в молодости, добывал пропитание частными уроками. Так же обстояло дело и в тот, к счастью, краткий период, когда от преподавания в гимназии Штейнер за неcдачу экзаменов был отстранен, а реальное училище еще не открылось. Однако он неизменно возвращался в родное училище, где к его выходкам привыкли, а математические его таланты высоко ценились.

В реальном училище, подбирая задачи для сильных школьников, Штейнер приобрел сохранившийся у него на всю жизнь интерес к элементарной геометрии. Рассмотрим несколько результатов Штейнера в этой области. Начнем с задач, идущих от великого Эйлера.

Эйлер установил, что *три середины сторон произвольного треугольника, три основания его высот и три точки, делящие пополам отрезки высот от точки их пересечения* (ортоцентра треугольника) *до вершин принадлежат одной окружности.* Эта окружность называется *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек треугольника*. Замечательно, что для каждого треугольника его окружность Эйлера касается вписанной и трех вневписанных окружностей (рис. 1). Этот факт часто называют *теоремой Фейербаха* по имени того, кто впервые его доказал; но мало кто знает, что незнакомый с результатом Фейербаха Штейнер доказал эту теорему всего через два года после ее первооткрывателя и сразу же опубликовал свой результат (так что многие математики познакомились с ним по публикации Штейнера, а не Фейербаха).

Задача 1. Пусть окружность S с центром в ортоцентре H треугольника ABC пересекает его средние линии $B_1A_1(\parallel AB)$, C_1B_1 $(\parallel BC)$ и $A_1C_1(\parallel CA)$ соответственно в точках F_1 и F_2, D_1 и D_2, E_1 и E_2. Докажите, что $AD_1=AD_2=BE_1=BE_2=CF_1=CF_2$ (теорема Штейнера).

Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ *перспективны с центром перспективы* P, если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 сходятся в одной точке P. Два «собственно подобных» треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (т. е. подобных и таких, что направления обхода $A \to B \to C$ и $A_1 \to B_1 \to C_1$ одинаковы — оба совпадают с направлением вращения часовой стрелки или оба противоположны

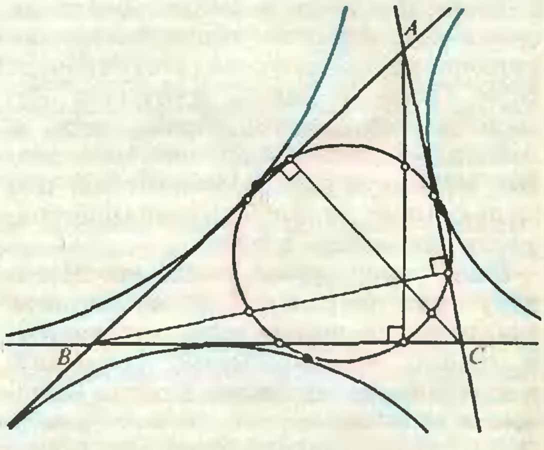


Рис. 1.

ему) всегда можно совместить *центроподобным поворотом* с центром Q, т. е. равномерным растяжением от Q или сжатием к Q (гомотетией), сопровождаемым поворотом вокруг Q (почему?); точка Q называется *центром подобия* треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Задача 2. Пусть a, b, c — прямые, образующие треугольник T; пусть прямая l пересекает a, b, c в точках A_0, B_0, C_0. Восстановим в этих точках перпендикуляры к сторонам треугольника T: $a_1 \perp a$, $b_1 \perp b$, $c_1 \perp c$. Обозначим треугольник, образованный прямыми a_1, b_1, c_1, через t.

а) Тогда треугольники T и t собственно подобны и перспективны; описанные вокруг них окружности S и s взаимно перпендикулярны (т. е. перпендикулярны касательные к S и к s в точке их пересечения); точки $\{P, Q\} = S \cap s$ являются соответственно центром перспективы и центром подобия треугольников T и t (теоремы Штейнера).

б) Как изменятся приведенные теоремы, если прямые a_1, b_1, c_1 не перпендикулярны a, b и c, а образуют с a, с b и с c соответственно заданный (по величине и по направлению) угол α?

Следующая серия задач, касающихся полного четырехсторонника, идет от великого Гаусса: Штейнер со вкусом выбирал предшественников!

Полным четырехсторонником Ч называется фигура, образованная четырьмя прямыми «общего положения» (т. е. такими, что никакие три не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны); треугольники, сторонами которых являются три из этих прямых, называются *треугольниками четырехсторонника* Ч; точки пересечения прямых — *вершинами четырехсторонника* Ч; отрезки, соединяющие «несмежные» (не принадлежащие одной из наших прямых) вершины,— *диагоналями четырехсторонника* Ч.

Задачи

3 (теорема Гаусса). Середины трех диагоналей четырехсторонника Ч принадлежат одной прямой (рис. 2, а). Эта прямая называется *прямой Гаусса четырехсторонника* Ч.

4. Описанные вокруг четырех тре-

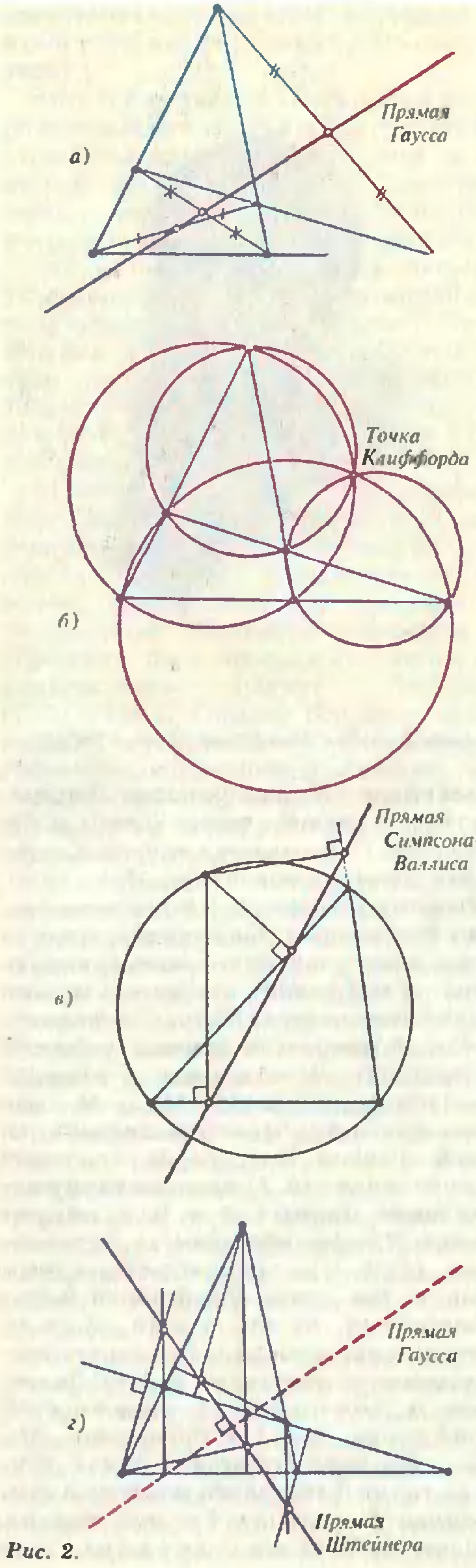


Рис. 2.

Уильям Кингдом Клиффорд (1845—1879).

угольников Ч окружности пересекаются в одной точке (рис. 2, *б*). Эта точка C называется *точкой Клиффорда четырехсторонника Ч*.

Теорема из задачи 4 была известна и до Клиффорда. Он, однако, придумал замечательную конструкцию (*цепь Клиффорда*), в которую эта задача включается. *Полным n-сторонником N* назовем n прямых «общего положения»; N содержит n полных $(n-1)$-сторонников $M_1, M_2, ..., M_n$, получаемых отбрасыванием прямых по одной. *Точкой Клиффорда «полного 2-сторонника»* (a, b) назовем точку пересечения прямых a и b, а *окружностью Клиффорда полного 3-сторонника* (a, b, c) — окружность, содержащую три точки Клиффорда 2-сторонников (a, b), (a, c) и (b, c) (т. е. окружность, описанную вокруг треугольника со сторонами a, b, c). Далее, если n четно, то n окружностей Клиффорда $(n-1)$-сторонников $M_1, M_2, ..., M_n$ пересекаются в одной точке — *точке Клиффорда полного n-сторонника N* (при $n=4$ — это теорема задачи 4). Если же n нечетно, то n точек Клиффорда $(n-1)$-сторонников $M_1, M_2, ..., M_n$ принадлежат одной окружности — *окружности Клиффорда полного n-сторонника N*.

Задачи

5 (вспомогательные задачи). а) Основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника T из точки M описанной вокруг него окружности, принадлежат одной прямой (рис. 2, *в*). Эта прямая w называется *прямой Симпсона — Валлиса* точки M относительно треугольника T.

б) Прямая w делит пополам отрезок MH, где H — ортоцентр треугольника T.

6 (теоремы Штейнера). *а*) Ортоцентры четырех треугольников Ч принадлежат одной прямой (рис. 2, *г*). Эта прямая s называется *прямой Штейнера четырехсторонника Ч*.

б) Для каждого полного четырехсторонника Ч его прямая Штейнера s перпендикулярна его прямой Гаусса g.

Продолжим теперь жизнеописание Штейнера. Самой большой его удачей в берлинский период жизни было знакомство с математиком-любителем, богатым промышленником, талантливым инженером и железнодорожным магнатом Августом Леопольдом Крелле (1780—1855). Видным ученым Крелле не был, хоть он и состоял членом Берлинской (Прусской) и членом-корреспондентом Петербургской (Российской) академий наук. Однако этих отличий он удостоился скорее за свои инженерные достижения и организационные таланты, чем за научные успехи. Но крупный предприниматель обязан хорошо разбираться в людях — и Крелле доказал, что этими способностями он обладал в полной мере.

Первый специализированный математический журнал в Европе был основан в 1810 году известным французским математиком Жозефом Диазом Жергоном (1771—1859) и назывался «Анналы Жергона». Крелле решил создать математический журнал в Германии. Обдумывая состав будущих авторов журнала, Крелле в первую очередь рассчитывал на двух совершенно неизвестных профессиональным математикам лиц, в таланты которых он глубоко верил: на недоучившегося норвежского студента Н. Х. Абеля и на учителя средней школы Якоба Штейнера. Первый выпуск нового журнала, который инженер Крелле назвал: «Журнал чистой и прикладной математики», вышел в 1826 году. Основное его содержание (как и содержание следующих выпусков журнала) составляли статьи Абеля и Штейнера. Так, в первых трех томах журнала напечатано 15 (!) статей и заметок Штейнера. «Журнал Крелле», как его тут же стали именовать математики, стал «первым математическим журналом мира». (В этой связи Жергон даже закрыл в 1831 году свой журнал. Впрочем, в 1836 году он был возобновлен другим французским математиком Жозефом Лиувиллем (1809—1882) под названием, в точности копирующим название журнала Крелле.)

С созданием журнала Крелле Штейнер получил трибуну, с которой он мог возвещать свои геометрические идеи. К тому же влиятельный Крелле стал инициатором избрания Штейнера (в 1834 году) в Берлинскую Академию наук: выдающиеся научные труды Штейнера, опубликованные в журнале Крелле, давали для этого достаточные основания. После этого было уже нетрудно добиться избрания Штейнера профессором — и в 1835 году Штейнер расстался со средней школой, заняв место профессора естественно-научного отделения Берлинского университета.

Замечательно, что неважный школьный учитель Штейнер оказался выдающимся университетским профессором. В школе его раздражали чуждые математике ученики; интересующиеся же геометрией студенты вдохновляли Штейнера, и его яркие по форме и темпераментные по исполнению лекции сразу же стали пользоваться очень большим успехом: даже швейцарский акцент необычного профессора нравился студентам. Импонировало студентам и то, что Штейнер постоянно ставил на своих лекциях задачи и вызывал слушателей к доске для решения этих задач. (В наши дни так же строил свои лекции в Московском университете академик И. М. Гельфанд — и они тоже имели у студентов большой успех.)

Этот успех лекций Штейнера в истории геометрии частично сыграл даже отрицательную роль. Так, еще и во второй половине нашего столетия, лекции, скажем, по проективной геометрии во многих университетах мира читались по сильно к тому времени устаревшей схеме, разработанной не получившим систематического образования швейцарским пастухом. При этом использовалась придуманная Штейнером архаическая терминология, не употребляемая больше ни в одном разделе математики.

Штейнер чувствовал себя лидером немецкой геометрии; при этом на отступления от своих установок он реагировал зачастую достаточно болезненно. Самой заметной фигурой в современной Штейнеру геометрии в Германии был профессор Боннского университета Юлиус Плюккер (1801—1868). Однако Плюккер представлял *аналитическое* направление геометрии, стремящееся заменить геометрические образы их записью в координатах и затем работать с координатными представлениями геометрических объектов, используя совершенный алгебраический аппарат. Уже одно это было крайне антипатично «чистому» геометру Штейнеру, аналитических методов в геометрии не признававшему. Кроме того, возможно, Плюккер имел в глазах выходца из бедной крестьянской семьи Штейнера, так и не получившего университетского образования, еще два недостатка. Плюккер происходил из семьи рейнских промышленных магнатов и был чрезвычайно богат. Помимо того, он окончил два университета: в Бонне и в Париже. Поэтому немудрено, что работы Плюккера вызывали ярость Штейнера.

Плюккер в своих работах бывал неаккуратен — описки и другие дефекты, обычно легко устранимые, встречались у него нередко, так что почва для нападок Штейнера и в самом деле была. Резкая (и чаще всего несправедливая) критика Штейнера так утомила Плюккера, что он времен-

Давид Гильберт (1862—1943).

но даже вовсе отказался от геометрии, вернувшись к ней (с выдающимися успехами) лишь после смерти Штейнера. Пока же он обратился к эспериментальной физике, успев и в этой области очень много. В частности, возможно, что без нападок Штейнера на Плюккера человечество позже пришло бы к идеям физического структурного анализа и к открытию так называемых катодных лучей, осуществленному учеником Плюккера Иоганном Вильгельмом Гитторгом (1824—1914).

Так даже недостатки больших ученых иногда оборачиваются благом для науки!

Последние два года жизни Штейнер много болел — здесь сказались перенапряжение и недоедание в ранние годы. Для излечения он часто ездил в родную Швейцарию, но в 1863 году из такой поездки он так и не вернулся: Штейнер умер 1 апреля 1863 года в полном одиночестве в номере гостиницы в Берне. Длительный период материальной необеспеченности помешал ему обзавестись семьей. Он завещал некоторую сумму денег Берлинской Академии наук — для учреждения премии за сочинения по геометрии (конечно же, «чистой»!), и руководству кантона, где он родился — на премию за успехи в области математики ученикам начальной школы для детей бедняков.

Приложение

Построения с помощью одной линейки

Постулаты 1—3 Евклидовых «Начал» утверждают возможность неограниченного продолжения заданного отрезка прямой, проведения прямой через две известные точки и проведения окружности с заданными центром (точкой) и радиусом (отрезком). Вместе с подразумеваемыми Евклидом, но явно не формулируемыми, постулатами о возможности указать точку пересечения двух заданных (например, каждая — двумя своими точками) прямых, двух известных (определенных своими центрами и радиусами) окружностей и заданных прямой и окружности эти постулаты описывают весь массив «разрешимых по Евклиду» задач на построение: эти задачи должны сводиться к перечисленным постулатам, т. е. решаться с помощью линейки и циркуля.

В 1797 году в Италии была издана книга Лоренцо Маскерони (1750—1800) «Геометрия циркуля», в которой устанавливалось, что *все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, разрешимы также с помощью одного лишь циркуля* (с тем естественным ограничением, что отрезок прямой, понятно, циркулем быть построен не может,— однако, зная две его точки, можно циркулем указать неограниченное количество других точек отрезка). Гораздо позже была найдена изданная в 1672 году (за 125 лет до Маскерони!) по-голландски и по-датски книга датчанина Георга Мора (1640—1697), в которой была доказана та же теорема.

Штейнер же заинтересовался построениями, осуществимыми с помощью одной линейки (см. задачи 1—3 ниже). Он последовательно рассмотрел построения одной линейкой, выполнимые при наличии на плоскости а) двух параллельных прямых или отрезка, разделенного известной точкой в данном рациональном отношении; б) параллелограмма; в) квадрата; г) окружности с известным центром — и установил, что в случае г) разрешимы все «разрешимые по Евклиду» задачи на построение (конечно, окружность с данными центром и радиусом мы одной линейкой

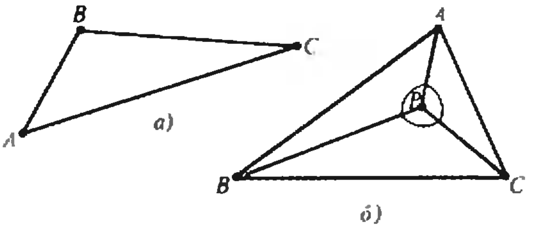


Рис. 3.

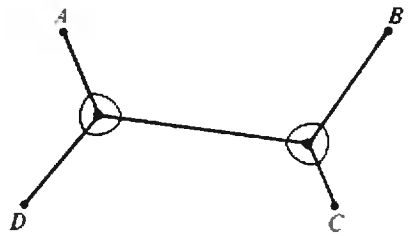


Рис. 4.

построить не можем,— но можем найти любое число точек этой окружности).

Задачи

1°. Даны параллельные прямые AB и l. Постройте: а) середину C отрезка AB; б) такую точку D этого отрезка, что $AD=AB/n$, где n — заданное (натуральное) число.

2°. Даны точки A, B и а) середина C отрезка AB; б) такая точка D этого отрезка, что $AD=AB/n$. Проведите через заданную точку M прямую $l \| AB$.

3°. На плоскости заданы точка M, прямая l и а) параллелограмм, б) квадрат. Проведите через точку M в случае а) прямую $m \| l$, в случае б) — прямую $m \perp l$.

4°. На плоскости даны окружность S с центром O и а) 5 точек: A, B, Q, K, L; б) 6 точек Q, K, L, P, M, N. Постройте в случае а) точки пересечения прямой AB и окружности с центром Q и радиусом KL; в случае б) — точки пересечения окружностей с центрами Q и P и радиусами KL и MN.

5° (задача Гильберта). На плоскости дана окружность S. Докажите, что одной линейкой — без циркуля! — построить центр этой окружности невозможно.

Кратчайшие сети дорог

Штейнер часто задавал своим студентам задачи, требующие указать самую лучшую в том или ином отношении фигуру или конфигурацию. Вот одна из его любимых задач:

Имеются три деревни: A, B, C. Требуется соединить их минимальной по длине сетью дорог.

Более или менее ясно (хотя и это требуется еще доказать), что решение здесь задается либо двумя (кроме длиннейшей) сторонами $\triangle ABC$, либо отрезками AP, BP, CP, где сумма расстояний от P до вершин $\triangle ABC$ — наименьшая возможная (рис. 3, *а*, *б*). При этом в случае рисунка 3,*б* отрезки AP, BP, CP должны образовывать в точке P одинаковые углы, ибо если, скажем $\angle APB \neq \angle APC$, то можно найти такую точку Q, что $QA=PA$, а $QB+QC<PB+PC$. Отсюда следует, что решение задачи Штейнера дается рисунком 3, *б*, если каждый угол $\triangle ABC$ меньше 120°, и рисунком 3, *а*, если $\angle B \geqslant 120°$.

В случае, когда число деревень $n>3$, «минимальная» система соединяющих их дорог может оказаться родственной рисунку 3,*а*, т. е. состоять из каких-то дорог, соединяющих наши деревни — такая система дорог называется *остовной*. Перебором (если надо — с помощью ЭВМ; сейчас к решению «общей» задачи Штейнера с большим числом «деревень» активно привлекаются компьютеры) всегда можно найти самую короткую остовную систему дорог. Но чаще лучшей является сеть дорог, родственная рисунку 3,*б*, т. е. содержащая дополнительные «узлы» сети, в которых сходятся три дороги, попарно образующие между собой углы в 120° — такие узлы называются *точками Штейнера*, а содержащие их сети дорог — сетями Штейнера (рис. 4). Увы! Никаких общих методов отыскания минимальных сетей Штейнера, соединяющих n пунктов, у нас нет; неизвестно также, когда «абсолютно минимальная» сеть дорог будет остовной, а когда — сетью Штейнера. Правда, предполагают, что минимальная остовная сеть дорог очень заметно превышать минимальную сеть Штейнера не может: в самом худшем случае она окажется всего в $(2/3)\sqrt{3}$ раз (т. е. примерно на 15 %) длиннее — но и эта гипотеза доказана пока всего лишь для случая $n \leqslant 5$.

Вот как непроста оказалась «общая» задача Штейнера о кратчайшей сети путей, соединяющих n точек (у самого Штейнера для случая $n>3$ имелись лишь отдельные примеры таких сетей — но и сегодня мы знаем почти так же мало, как знал он!).

Задачи

6°. Докажите сформулированный результат Штейнера.

7°. Найдите кратчайшую сеть путей, соединяющих 4 точки A, B, C, D, являющиеся вершинами: а) квадрата; б) треугольной пирамиды (тетраэдра).

ФЛЕКСАГОНЫ, ФЛЕКСОРЫ, ФЛЕКСМАНЫ

А. А. ПАНОВ

Приглашаем вас на короткую экскурсию в загадочный мир флексагонов и флексоров — бумажных игрушек, обладающих поразительной способностью внезапно менять свою форму и цвет. Любую из этих игрушек вы сумеете склеить за самое короткое время.

Но прежде всего — о названии статьи. Английское to flex означает складываться, сгибаться, гнуться.

А теперь приготовьте лист ватмана или плотной альбомной бумаги, карандаши, ножницы, клей — и за дело.

Гексафлексагон

Флексагон — это склеенный из бумаги многоугольник, который, изгибаясь и складываясь, может переходить во все новые и новые состояния.

Гексафлексагон — это флексагон, имеющий форму правильного шестиугольника. Вырежем из бумаги полоску шириной 2,5 см, состоящую из десяти правильных треугольников, и раскрасим ее обе стороны — прямую и оборотную, как на рисунке 1.

Несколько раз перегнем полоску по границам треугольников и продолжим изготовление флексагона, складывая полоску, как на рисунке 2.

Теперь остается только подогнуть вниз синий треугольник, склеить друг с другом две неокрашенные треугольные поверхности — и флексагон готов. Одна сторона у него красная, другая — синяя. Чтобы извлечь на свет его третью — зеленую поверхность, необходимо действовать следующим образом. Сначала флексагон ставится на плоскость стола так, чтобы он опирался на три нижние точки. Эти точки нужно поджать друг к другу, и в момент их полного сближения флексагон сам собой вывернется наизнанку, обнажая свою зеленую поверхность. Теперь остается развести верхние точки флексагона в стороны, и флексагон готов к новой трансформации. Так, последовательно переходя из одного состояния в другое, флексагон будет поочередно предъявлять нам все свои три поверхности. Рисунок 3 дает некоторое представление об изгибании флексагона.

Сделанная нами модель является простейшей из обширного семейства гексафлексагонов, описанного в книге Мартина Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (М., Мир, 1971). В этой интереснейшей книге изложена история открытия гексафлексагонов и подробно рассказано о том, как можно строить модели с бо́льшим числом поверхностей.

Двойное шарнирное соединение

Двойное шарнирное соединение — это конструктивный элемент, служащий основой для еще одного ряда флексагонных моделей. Вырежем из бумаги два прямоугольника размером $2{,}5\times5$ см и две полоски размером 1×7 см. На обоих концах каждой полоски отогнем по квадрату 1×1 см. Раскрасим прямоугольники и полоски, как на рисунке 4, где представлены их прямые и оборотные стороны.

Приклеим обе полоски к одному из прямоугольников, соединяя незакрашенные квадраты с незакрашенными, и завернем обе полоски на красную сторону прямоугольника. Должно получиться то, что изображено на рисунке 5.

Сверху красной стороной наложим второй прямоугольник и снова склеим незакрашенные квадраты. Это и есть двойное шарнирное соединение. Оно само является простейшим флексагоном, который может находиться в

Рис. 1.

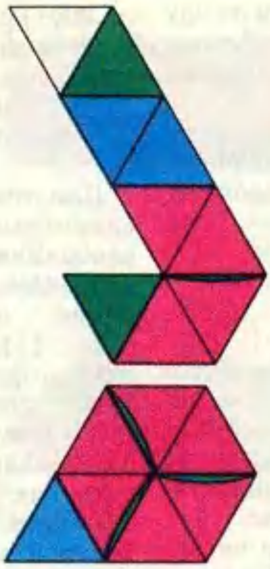


Рис. 2.

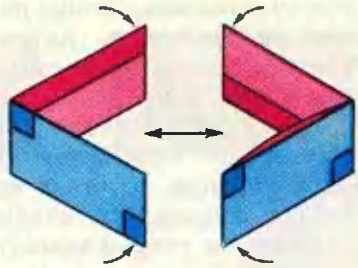


Рис. 6.

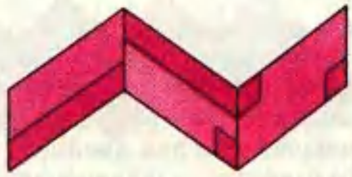


Рис. 7.

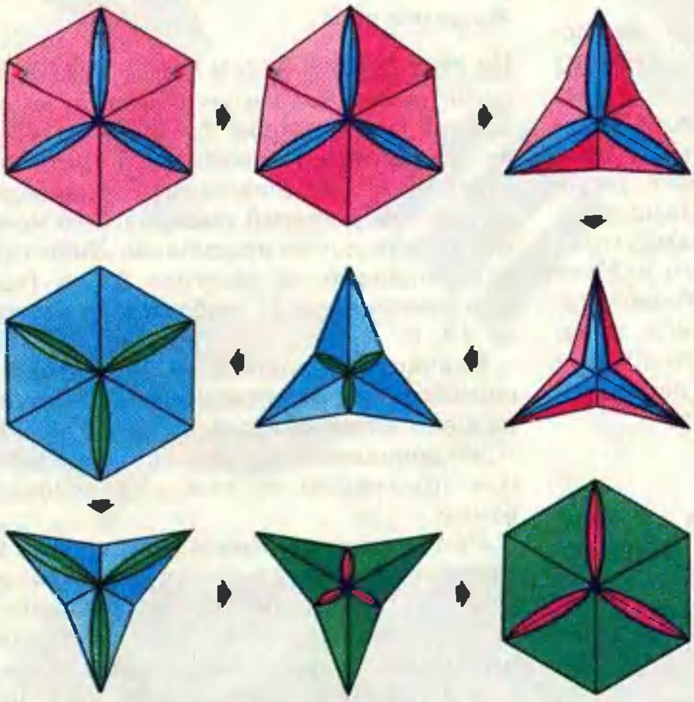


Рис. 3.

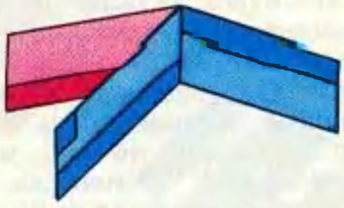


Рис. 8.

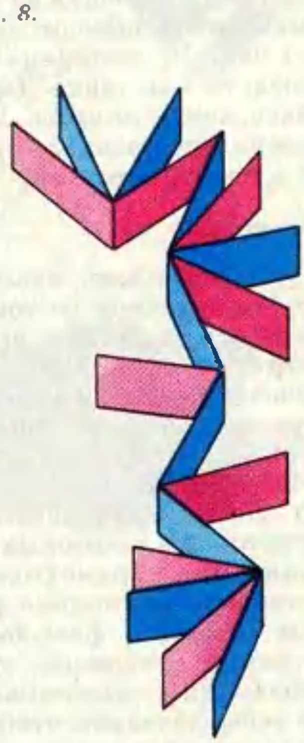


Рис. 9.

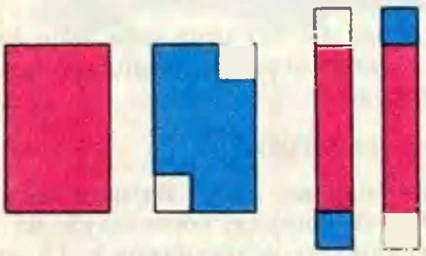


Рис. 4.

Рис. 5.

двух состояниях. Чтобы перейти от одного состояния к другому, нужно сблизить удаленные стороны прямоугольников (рис. 6).

В упомянутой книге Гарднера описано целое семейство флексагонов, в конструкции которых использовано двойное шарнирное соединение. Они называются тетрафлексагонами.

Флексоцепь 1

Возьмем двойное шарнирное соединение и присоединим к нему еще один прямоугольник. Получится короткая цепочка из трех прямоугольников, содержащая два двойных шарнирных соединения — флексоцепь (рис. 7).

Она может находиться уже в четырех состояниях. Еще одно из них изображено на рисунке 8.

Не будем останавливаться на достигнутом и удлиним нашу цепочку до 15—20 прямоугольников (рис. 9). Если цепь содержит n двойных шарнирных соединений, т. е. $n+1$ прямоугольников, то она может находиться в 2^n состояниях. Например, цепочка, состоящая из 21 прямоугольника может находиться всего в $2^{20} = 1\,048\,576$ состояниях. Забавно наблюдать, как такая флексоцепь, изгибаясь, лежит на столе. Легкого прикосновения достаточно, чтобы перевести ее в новое состояние.

Флексоны

Пусть флексоцепь находится в каком-то определенном состоянии. Возьмемся за оба ее конца и начнем ее растягивать. Пройдя через ряд состояний, цепочка окажется в каком-то устойчивом состоянии, например, как на рисунке 10.

Устойчивые состояния представляют собой прямолинейную цепочку, от которой в некоторых узлах отходят единичные прямоугольники. Такие устойчивые состояния флексоцепи будем называть флексонными состояниями, а отходящие от цепи прямоугольники — флексонами. Мы выбрали такое название, чтобы подчеркнуть аналогию флексонов и элементарных частиц. Действительно, флексоны обладают следующими двумя замечательными свойствами:

флексоны могут перемещаться вдоль флексоцепи;
при столкновении флексоны «аннигилируют»

Для того чтобы заставить флексон сдвинуться, нужно приблизить его свободную сторону к флексоцепи — сработает двойное шарнирное соединение и флексон переместится (рис. 11). Последовательно перемещаясь, флексон может свободно двигаться вдоль всей флексоцепи.

Не буду описывать, как происходит аннигиляция флексонов, и говорить о других их свойствах, чтобы не портить вам удовольствия от самостоятельной работы с флексоцепью.

Флексоцепь 2

На этот раз мы будем строить флексоцепь не из прямоугольников, а из квадратов размером $2{,}5 \times 2{,}5$ см. Снова рассмотрим двойное шарнирное соединение и попытаемся подсоединить к нему третий квадрат. Это можно сделать двумя способами. Либо так, как показано на рисунке 12, *а* (как для флексоцепи 1), либо как на рисунке 12, *б*.

Сейчас мы продолжим цепь вторым способом и получившуюся цепочку назовем флексоцепью 2 (рис. 13). Это тоже довольно занимательная модель, и я предлагаю ее вам для исследования.

Любопытно замкнуть флексоцепь 2, состоящую из четырех квадратов (рис. 14). Получившийся флексагон можно перегибать в двух перпендикулярных направлениях, и он может находиться в четырех состояниях, последовательно переходя из одного в другое.

На этом мы заканчиваем наш рассказ о флексагонах. Подошел черед флексоров.

Кольцо из тетраэдров

На этот раз на листе бумаги нужно разместить фигуру, состоящую из 40 правильных треугольников и 13 клапанов (рис. 15). После того как вы ее

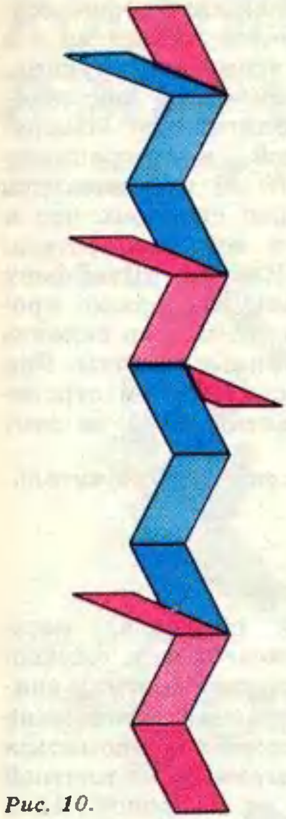


Рис. 10.

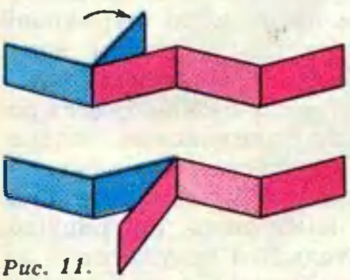


Рис. 11.

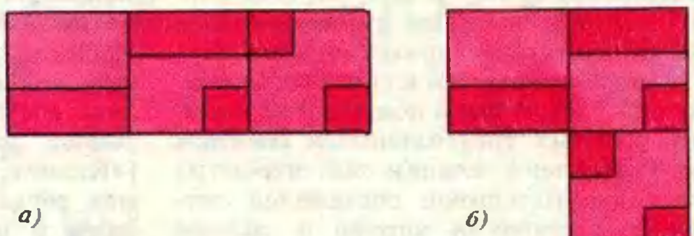


Рис. 12.

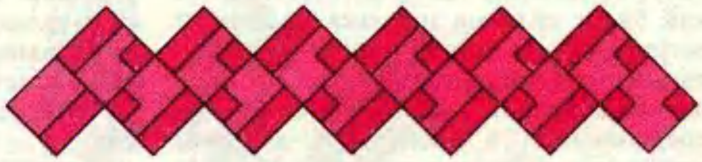


Рис. 13.

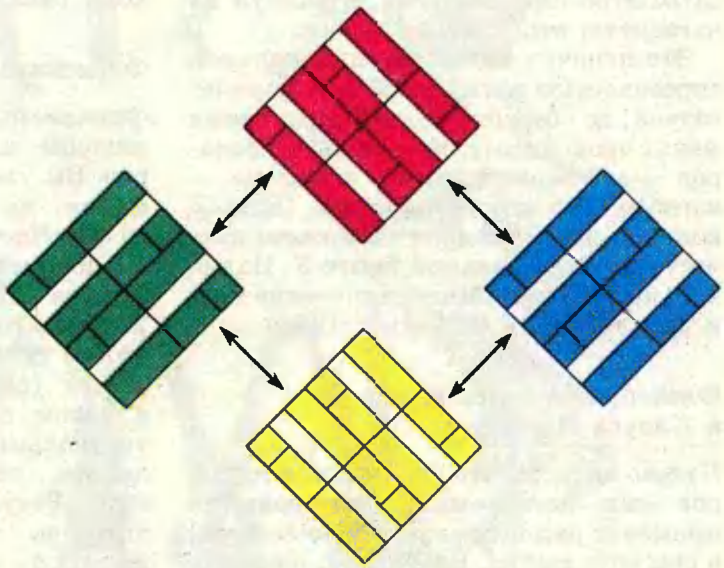


Рис. 14.

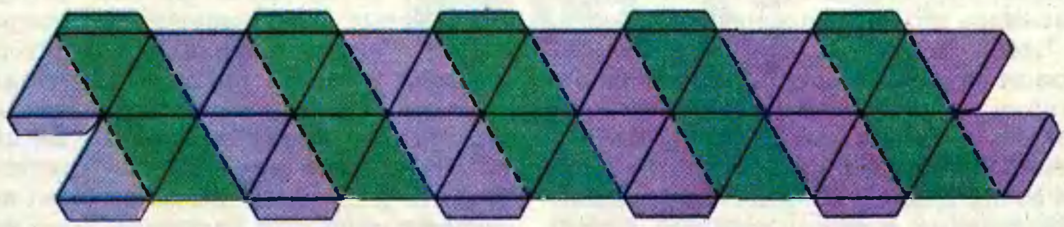


Рис. 15.

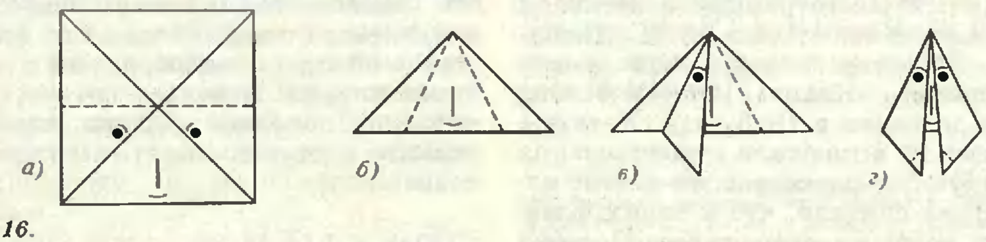


Рис. 16.

вырежете, нужно будет сделать сгибы — по сплошным линиям сгибом вверх, а по пунктирным — вниз.

Теперь приступим к склейке. Сначала работаем с левой полоской из четырех зеленых треугольников. Изогнем ее и подклеим клапан так, чтобы из этих треугольников составился тетраэдр. Сдвинемся вправо и склеим следующий тетраэдр из фиолетовых треугольников и так далее. После того как будет склеена цепочка из девяти тетраэдров, останутся четыре фиолетовых треугольника. Теперь вы уже легко сообразите, как объединить эти треугольники в последний, десятый тетраэдр и замкнуть цепочку. Можете проконтролировать себя, взглянув на четвертую страницу обложки.

Эта цепочка обладает удивительной способностью изгибаться и выворачиваться до бесконечности, все время меняя свою форму. Кольцо из тетраэдров — это первый пример флексора — изгибаемого многогранника. Еще о кольцах из тетраэдров вы можете прочесть в увлекательной книге У. Болла и Г. Коксетера «Математические эссе и развлечения» (М., Мир, 1986).

Флексоры Роберта Коннели и Клауса Штеффена

Нужно сказать, что кольцо из тетраэдров как изгибаемый многогранник вызывает ряд возражений. Во-первых, в нем есть дырка. Во-вторых, имеются ребра, к которым подходят по четыре грани. Так что не понятно, стоит ли называть это кольцо многогранником.

Чтобы избежать всяких сомнений, при поиске флексоров можно было бы ограничиться только выпуклыми многогранниками, т. е. многогранниками, лежащими по одну сторону от каждой из своих граней. Но имеется знаменитая теорема Коши о том, что любой выпуклый многогранник неизгибаем (см. например, статью Н. П. Долбилина «Жесткость выпуклых многогранников», «Квант», 1988, № 5). Она была доказана в 1813 году. Хотя эта теорема не исключала существования невыпуклых флексоров, но многие математики считали, что и таких флексоров тоже не существует. Поэтому подлинной сенсацией явился флексор, открытый Робертом Коннели в 1977 году. В свое время конструкция, предложенная Коннели, обсуждалась в статье В. Залгаллера «Непрерывно изгибаемый многогранник» («Квант», 1978, № 9) и показалась мне тогда настолько сложной, что я даже и не стал в ней разбираться. Однако вскоре Клаусу Штеффену удалось придумать настолько простой флексор, что его можно склеить буквально за считанные минуты. Как это сделать, показано на 4-й странице обложки «Кванта» № 5 за этот год.

А теперь переходим к заключительному сюжету.

Фле́ксманы

Флексманы — это существа, населяющие мир флексагонов и флексоров. Вы уже наверняка обратили внимание на изображение флексмана (с. 13). Чтобы поближе познакомиться с флексманами, вырежьте из плотной бумаги квадрат со стороной 15—20 см. Его нужно согнуть по диагоналям сгибом вверх и по штриховой линии (рисунок 16, *а*) сгибом вниз, а затем сложить, чтобы получился треугольник. Теперь нужно будет проделать четыре одинаковые операции. Результат первой из них — сгиб по штриховой линии рисунка 16, *б* — изображен на рисунке 16, *в*, окончательный результат — на рисунке 16, *г*. Остаются еще четыре одинаковые завершающие операции — отгибание маленьких треугольничков, и перед нами — флексман.

Самое примечательное свойство флексманов — это их умение ходить по наклонным плоскостям. Стоит поставить флексмана на достаточно пологую наклонную плоскость, и он тут же начинает мелкими шажками спускаться по ней. Каждый из флексманов обладает своеобразным характером или, уж во всяком случае, своеобразной походкой. Думаю, что знакомство с ними доставит вам удовольствие.

КОСМИЧЕСКИЕ ИЛЛЮЗИИ И МИРАЖИ

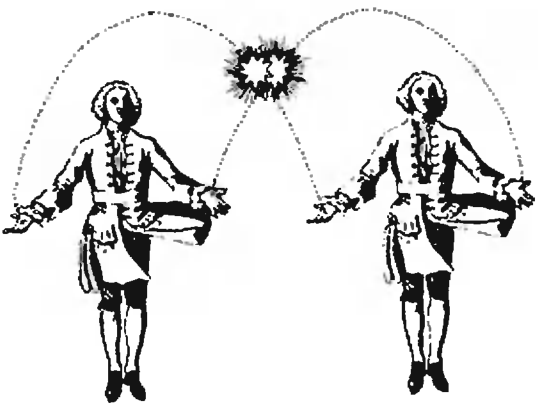
Доктор физико-математических наук
А. Д. ЧЕРНИН

Космические источники излучения, получившие название квазаров, открыты четверть века назад, в 1963 году. Но их природа и до сих пор остается не до конца разгаданной. Не видно конца сюрпризам, которые они преподносят физикам и астрономам. Недавно обнаружены удивительные явления, никогда прежде не наблюдавшиеся на небе: удвоение образов и движение со сверхсветовой скоростью.

В этой статье мы не будем касаться истории открытия квазаров, гипотез и теорий, выдвинутых для объяснения их свойств.*) Приведем лишь самые общие сведения о квазарах, а затем подробно расскажем, что представляют собой миражи и иллюзии в мире квазаров и как их следует понимать.

---

*) Об этом можно прочитать в книге А. Д. Чернина «Звезды и физика», выпущенной в 1984 году издательством «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» (выпуск 38). (*Примеч. ред.*)



Самые мощные излучатели во Вселенной

Каждый квазар — это яркий «фонарь», который светит не только в видимом оптическом диапазоне электромагнитных волн, но и во всех других диапазонах — от радиоволн до гамма-лучей. Размер излучающей области чаще всего сравним с размером Солнечной системы. Но в Солнечной системе лишь одна звезда — Солнце, а у квазара в том же объеме умещается генератор энергии, в тысячи раз более мощный, чем целая Галактика с ее ста миллиардами звезд. Как работает этот генератор? Таков самый главный вопрос физики квазаров, на который еще предстоит найти ответ.

Квазары различимы в таких далях Вселенной, где ни звезды, ни целые галактики уже не разглядеть даже с помощью крупнейших телескопов. Самый далекий из известных сейчас квазаров находится от нас на расстоянии 13 миллиардов световых лет. Это значит, что свет от него идет к нам 13 миллиардов лет и, следовательно, мы видим его таким, каким он был 13 миллиардов лет назад. В те времена не существовало еще ни Земли, ни Солнца (по современным оценкам возраст Солнечной системы — около 5 миллиардов лет).

О расстояниях до квазаров и других далеких космических тел судят по спектрам их излучений. В спектрах квазаров видны линии излучения обычных атомов — таких, как водород, кислород, углерод и т. п.,— но все они сдвинуты к красному концу спектра, т. е. в область бо́льших длин волн. Этот сдвиг — знаменитое красное смещение — связан с тем, что источники излучения удаляются от нас. Само же удаление — это проявление общего расширения Вселенной. Согласно законам космологии, чем дальше от нас квазар или галактика, тем больше скорость убегания.

Если источник света испускает волны с периодом T_0 и при этом движется относительно нас со скоростью v, то волны видимого нами света будут иметь период

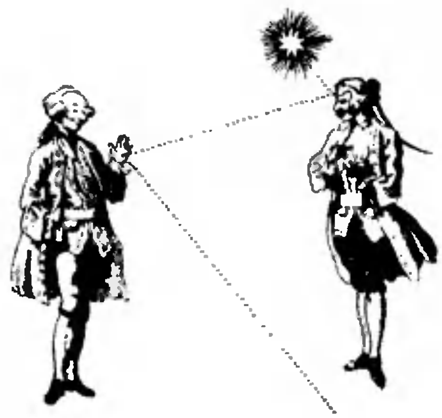
$$T=T_0\frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \qquad (1)$$

Здесь c — скорость света, θ — угол между направлением скорости и лучом зрения (прямой, которая соединяет нас и источник; когда источник движется прямо к нам, $\theta=0$, когда прямо от нас — $\theta=\pi$). Для самых далеких квазаров период T в 4—5 раз больше периода T_0. Изменение периода, а с ним и частоты и длины волны света из-за относительного движения источника и приемника называется эффектом Доплера. Он и создает красное смещение в спектрах удаляющихся галактик и квазаров.

Сейчас известно более 2500 квазаров. Они рассеяны по небесной сфере более или менее равномерно. В среднем расстояние между ними, если измерять его по дуге на небе, составляет несколько градусов (для наглядности скажем, что угловые диаметры Луны и Солнца около 0,5 градуса).

Но давно уже известны два очень близких друг к другу квазара, которые к тому же так похожи друг на друга, что получили название квазаров-близнецов. Они находятся друг от друга на расстоянии всего в шесть секунд дуги, что в тысячи раз меньше среднего расстояния между квазарами; яркость их практически одинакова; спектры этих квазаров одинаковы — в обоих случаях видны одни и те же линии излучения с одной и той же интенсивностью. Красное смещение в спектрах одно и то же — $T/T_0=2{,}4$. Это довольно значительная величина. Ей отвечают скорость удаления 0,7 c и расстояние от нас 7 миллиардов световых лет.

Поразительное сходство квазаров-близнецов сильно озадачивало астрономов. И вот была высказана догадка, что это в действительности не два объекта, а два изображения одного и того же объекта. Но как может возникнуть на небе такое удвоение образа?



Гравитационная линза

Лучи распространяются, как известно, прямолинейно, если отсутствует преломление. Космическая среда настолько разрежена, что практически не вызывает преломления. И тем не менее пути света могут оказаться искривленными. Такое искривление создают поля тяготения небесных тел.

В этом нет ничего особенно удивительного. Еще в ньютоновой теории тяготения считалось само собой разумеющимся, что луч света, рассматриваемый как поток частиц — световых корпускул, движущихся со скоростью света, отклоняется от прямолинейной траектории, когда проходит вблизи тяготеющего тела. Частицы света, как и все частицы и тела Вселенной, испытывают притяжение к гравитирующему телу.

Соображения об искривлении луча света полем тяготения остаются справедливыми и в релятивистской теории тяготения, которая называется общей теорией относительности. Согласно этой теории угол отклонения луча, проходящего на минимальном расстоянии r от тела массой M, равен (см. рис. 1)

$$\alpha=\frac{4GM}{c^2r}. \qquad (2)$$

По предложению А. Эйнштейна первые попытки наблюдать этот эффект предпринимались для света звезд, проходящего вблизи Солнца. Измерения можно проводить во время полного солнечного затмения, когда Луна закрывает солнечный диск. Множество наблюдений, проведенных начиная с полного солнечного затмения 1919 года, дали результаты, прекрасно согласующиеся с предсказанием общей теории относительности.

В 1936 году Эйнштейн опубликовал небольшую заметку, в которой предсказал новый эффект, связанный с отклонением света в поле тяготения,— эффект гравитационной линзы. Если на пути света от какого-то далекого источника к наблюдателю окажется тяготеющее тело, то при определенных условиях к наблюдателю придет больше света, чем в отсутствие этого тела. Поле тяготения тела способно направить к наблюдателю такие лучи, которые иначе прошли бы мимо наблюдателя. Тяготеющее тело, подобно обычной линзе, как бы фокусирует лучи.

Гравитационная линза и похожа, и не похожа на обычную световую. В собирающей линзе отклонение луча тем меньше, чем ближе он проходит к центру линзы. Поэтому в некоторую точку, лежащую на оси линзы,— в ее фокус — приходит не только луч, распространяющийся вдоль этой оси, но и все лучи, прошедшие через линзу. В поле тяготеющего центра картина иная: отклонение луча тем больше, чем ближе его путь к центру. Это видно из формулы (2).

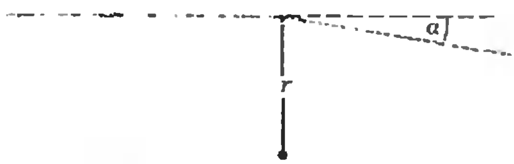


Рис. 1. Отклонение луча света в поле тяготеющей массы.

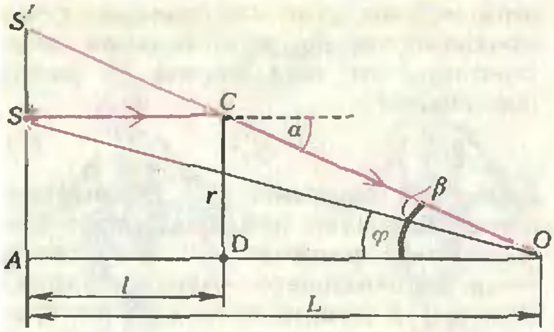


Рис. 2. Ход луча в гравитационной линзе.

Гравитационная линза может не только усилить изображение, но и создать два изображения одного объекта. Посмотрим, как это происходит.

На рисунке 2 показан ход лучей, распространяющихся от источника (точка S) к наблюдателю (точка O) мимо тяготеющего центра (точка D). Луч, идущий из источника, проходит на минимальном расстоянии $r=DC$ от тяготеющего центра, отклоняется им на угол α и приходит в точку наблюдения. (Для простоты вместо скругленной кривой нарисован просто излом прямой в точке C наибольшего сближения.) Наблюдатель видит источник не в точке S (в направлении OS), а в направлении луча OC — на прямой OS'. (Углы α, β и φ на рисунке должны считаться малыми.)

Как связаны между собой величины, задающие взаимное расположение источника, тяготеющего тела и наблюдателя? Из рисунка 2 видно, что

$$AS'=AS+SS'.$$

Поскольку углы α, β и φ малы (так что $\sin\alpha=\alpha$, $\sin\beta=\beta$ и $\sin\varphi=\varphi$),

$$AS'=L\beta,\ AS=L\varphi,\ SS'=l\alpha.$$

Подставляя эти три выражения в первое равенство, получаем:

$$L\beta=L\varphi+l\alpha.$$

Подставим в формулу (2) $r=DC=(L-l)\beta$ и с учетом этого перепишем соотношение между расстояниями и углами в виде

$$\beta^2-\varphi\beta-\frac{l}{L}\frac{4GM}{c^2(L-l)}=0. \qquad (3)$$

Это квадратное уравнение называют уравнением гравитационной линзы, создаваемой тяготеющим центром.

Рассмотрим возможные решения этого уравнения. Прежде всего обратимся к случаю, когда тяготеющий центр лежит строго на прямой OS (т. е. угол φ равен нулю). Тогда решение уравнения имеет вид

$$\beta=\beta_0=\pm2\left(\frac{l}{L}\frac{GM}{c^2(L-l)}\right)^{1/2}.$$

Картина обладает, очевидно, осевой симметрией, так что наблюдатель видит не точку S', а кольцо, получающееся вращением этой точки вокруг оси симметрии — прямой OS (или совпадающей с ней при $\varphi=0$ прямой OA); угловой радиус кольца равен $\beta=\beta_0$.

Если тяготеющий центр не лежит на прямой, соединяющей источник и точку наблюдения, то в картине отсутствует осевая симметрия. Уравнение (3) при $\varphi\neq0$ имеет два решения:

$$\beta_{1,2}=\frac{1}{2}\varphi\pm\sqrt{\frac{1}{4}\varphi^2+\frac{l}{L}\frac{4GM}{c^2(L-l)}}.$$

Это означает, что линза создает два изображения, направления на которые даются углами β_1 и β_2 (первый из этих углов положителен, а второй отрицателен). Ход соответствующих лучей показан на рисунке 3. Минимальные расстояния от притягивающего центра различны для двух решений:

$$r_1=(L-l)\beta_1,$$
$$r_2=(L-l)\beta_2.$$

Различны для них, очевидно, и углы отклонения.

Гипотеза о квазарах-близнецах как о двух изображениях одного квазара

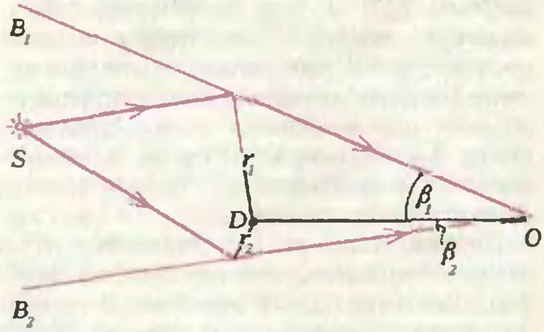
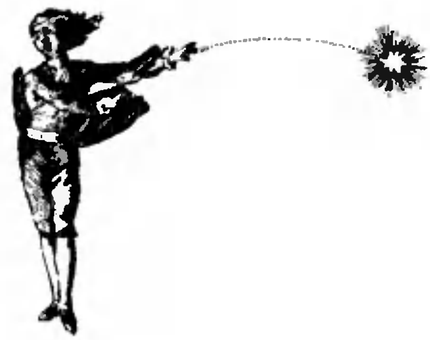


Рис. 3. Как получаются два изображения одного источника.

предполагает такое взаимное расположение источника света, гравитирующего центра и наблюдателя, какое показано на рисунке 3. Прямым ее доказательством могло послужить обнаружение самого́ тяготеющего центра в нужном месте на небесной сфере — между двумя изображениями квазара, но не на строго равных расстояниях от них. И это действительно удалось сделать. Тяготеющим центром оказалась слабая по блеску галактика, расположенная между квазарами-близнецами и притом несколько ближе к одному из них, чем к другому. Расстояние до нее оказалось приблизительно равным половине расстояния до квазара. Дальнейшие наблюдательные исследования показали, что реальная картина несколько сложнее. Выяснилось, что одно из изображений близнецов на самом деле представляет собой два очень близких изображения, которые сливались на прежних фотографиях. Нетрудно догадаться, что тройное изображение может возникать в том случае, когда отклоняющее поле тяготения создается не точечным центром, а объемным телом, лежащим на луче зрения. Таким телом и служит галактика. Лучи света от квазара могут проходить не только у края галактики, но и сквозь нее. Тяготеющая масса, которая определяет отклонения лучей, меньше для света, проходящего вблизи центра галактики, и больше для света, проходящего у ее края. Угол отклонения зависит от распределения масс в галактике. Уравнение линзы теперь уже будет более сложным, чем квадратное, и это создает большее разнообразие в возможных вариантах видимой картины.

Сейчас известно уже несколько примеров удвоения и утроения образов космических тел. Во всех случаях речь идет о квазарах. Эти миражи несомненно создаются эффектом гравитационной линзы.

Почему же гравитационные линзы обнаруживаются именно по квазарам и не действуют на свет звезд или галактик? Дело в том, что квазары, как мы говорили, видны издалека, в среднем с гораздо больших расстояний, чем галактики, не говоря уже о звездах. Поэтому вероятность того, что свет от них встретит по дороге к наблюдателю массивный (но слабый по блеску) объект, достаточно велика. Кроме того, квазар — это очень малый по видимому размеру, почти точечный источник, и из-за этого от него может возникнуть несколько отдельных изображений, которые не смажутся и не сольются, как это было бы для протяженных источников — галактик.



Быстрее света?

Самым первым из открытых квазаров был источник радиоизлучения, который значился под номером 273 в 3-м Кембриджском каталоге*). Это, можно сказать, образцовый квазар; он обладает всеми типичными свойствами квазаров и к тому же удобен для наблюдений. В его самой центральной области, где и рождается излучение, постоянно протекают какие-то бурные процессы, которые проявляются в изменениях блеска. Более того, из этой области время от времени вырываются светящиеся облака и струи вещества. Однажды появилась струя, которая прямо «на глазах у всех» увеличивалась в размерах, а яркое пятно на ее конце быстро удалялось от центра квазара. За четыре года наблюдений яркий конец струи удалился от центра на расстояние в двадцать световых лет. С какой же скоростью он двигался? Деля путь на

*) Это обширный список объектов, составленный радиоастрономами Кембриджского университета в Англии.

время, находим, что скорость в пять раз превышает скорость света.

Легко представить, как были озадачены астрономы. Ведь согласно теории относительности никакое тело не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме. Это один из самых важных законов физики. После первого удивления и даже растерянности решение этого парадокса было — по крайней мере в принципе — найдено. Сверхсветовые скорости оказались космической оптической иллюзией.

Вот самый простой пример, показывающий, как возникает иллюзия сверхсветовых движений.

Представим себе, что имеется «фонарик», который движется навстречу нам, но не строго по лучу зрения, а под небольшим углом к нему (рис. 4). Сначала наш фонарик выключен, а потом дважды — в точках S_1 и S_2 — включается и посылает в нашу сторону два световых сигнала. За время между своими двумя включениями источник света прошел путь S_1S_2 на нашем рисунке. Видимое нами перемещение меньше: оно представляет собой проекцию S_1S' этого пути на то, что называют картинной плоскостью (зафиксировав источник в точке S_1, наблюдатель из точки O дальнейшее движение источника проецирует на плоскость, перпендикулярную лучу зрения OS_1,— это и есть картинная плоскость). Как астрономы получали свои оценки скорости? Делили видимое перемещение

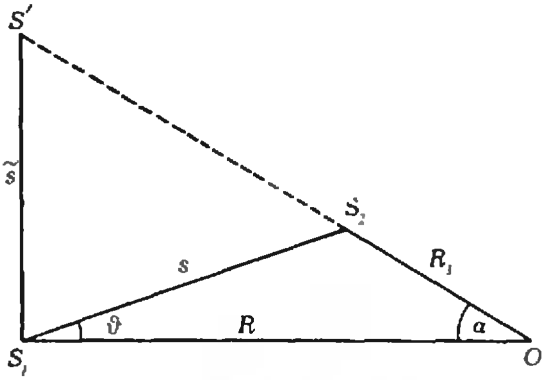


Рис. 4. Пример иллюзии движения со сверхсветовой скоростью.

(отрезок S_1S') на время, прошедшее между приемами первого и второго сигналов. И брали именно время между приемами, а не между испусканиями сигналов. А ведь это разные промежутки времени! Делает их различными тот самый эффект Доплера, о котором мы уже упоминали.

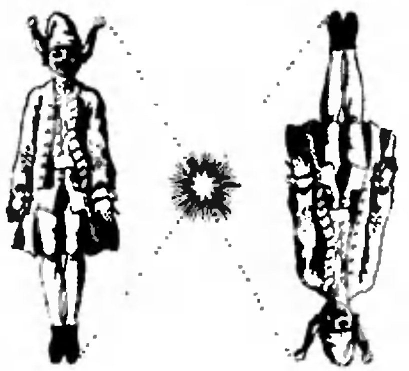
Действительно, соотношение (1) между периодами T и T_0 световой волны имеет на самом деле более общий характер. Оно применимо не только в случае периодических процессов. Период T_0 — это промежуток времени, скажем, между двумя соседними максимумами в испускаемой волне; а T — промежуток времени между теми же максимумами, когда они один за другим регистрируются наблюдателем. Каждый из максимумов можно, конечно, считать «сигналом», так что T_0 — это промежуток времени между двумя испусканиями сигналов, а T — между их приемами.

Когда источник света движется в нашу сторону, T меньше, чем T_0. Значит, в нашем примере с фонариком промежуток между приемами сигналов меньше промежутка между их испусканиями. Если скорость объекта близка к скорости света (но, конечно, не превосходит ее), разница между этими промежутками может быть сколь угодно большой.*)

При вычислении видимой скорости перемещения мы, так сказать, проигрываем в пути (отрезок S_1S' (см. рис. 4) меньше пути S_1S_2), но зато можем очень сильно выиграть во времени. Из-за этого и получается пугающе большое отношение видимого перемещения к времени между приемами сигналов; это отношение и посчитали скоростью движения источника света. Такая «видимая» скорость вполне может оказаться больше скорости света. Но реальная скорость перемещения равна отношению пройденного пути S_1S_2 к промежутку времени между испусканиями — а не приемами! — сигналов. Она может быть близка к скорости света, но

*)Тому, кто умеет вычислять пределы, нетрудно убедиться, что $\frac{T}{T_0} \to 0$ при $\frac{v}{c} \to 1$.

никогда не превысит ее. Выходит, что нельзя вычислять скорость делением пути, пройденного «там», на промежуток времени, измеренный «здесь». Но именно этому и учит теория относительности. А эффект Доплера, который дал нам решение парадокса,— прямое следствие теории относительности.



Как рождается иллюзия

Самое важное в теории относительности — это утверждение о том, что свет в пустоте распространяется с определенной конечной скоростью, которая не зависит от того, движется относительно нас источник света или покоится. Мы воспользуемся сейчас этим фактом, чтобы непосредственно получить формулы, описывающие наш пример с движущимся фонариком. (И нужно только прибавить, что речь будет идти о распространении света в пустоте при отсутствии на его пути сильных полей тяготения. Мы говорили, что поля тяготения способны искривить путь света; они способны также изменить и его скорость. Но если между нами и источником нет очень массивных притягивающих тел, скорость света есть просто c; так мы и будем считать.)

Пусть первый из двух сигналов испущен фонариком в некоторый момент, который мы выберем в качестве начала отсчета времени ($t=0$). Расстояние от нас (от наблюдателя) до источника в этот момент — R; значит, сигнал будет принят нами в момент времени $t_0=R/c$.

Пусть, далее, второй сигнал испущен в момент времени $t_1=s/v$, когда тело, двигаясь прямолинейно со скоростью v, прошло расстояние $s=S_1S_2$ (см. рис. 4). В момент t_1 расстояние до источника —

$$R_1=\frac{R-s\cos\vartheta}{\cos\alpha}\approx R-s\cos\vartheta$$

(мы учли, что угол α очень мал, так как расстояния R и R_1 много больше отрезка s, и $\cos\alpha\approx 1$). Второй сигнал доходит к нам за время

$$\frac{R_1}{c}=\frac{1}{c}(R-s\cos\vartheta)$$

и будет принят в момент

$$t_2=t_1+\frac{R_1}{c}=\frac{s}{v}+\frac{R}{c}-\frac{s}{c}\cos\vartheta.$$

От приема первого сигнала до приема второго сигнала прошло время

$$\Delta t=t_2-t_0=\frac{s}{v}\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right).$$

Отсюда можно выразить пройденное фонариком расстояние s через промежуток времени Δt, скорость движения v и угол ϑ:

$$s=\frac{v\cdot\Delta t}{1-\frac{v}{c}\cos\vartheta}.$$

Видимое перемещение тела $\tilde{s}$ представляется проекцией отрезка s на картинную плоскость:

$$\tilde{s}=s\sin\vartheta=\frac{v\sin\vartheta}{1-\frac{v}{c}\cos\vartheta}\Delta t$$

(мы вновь учли здесь, что угол α очень мал). Чтобы найти «видимую» скорость $\tilde{v}$, нужно разделить видимое перемещение $\tilde{s}$ на промежуток времени Δt:

$$\tilde{v}=\frac{\tilde{s}}{\Delta t}=\frac{v\sin\vartheta}{1-\frac{v}{c}\cos\vartheta}.$$

Допустим, что $v=0{,}8\ c$ и $\cos\vartheta=0{,}8$; тогда $\sin\vartheta=0{,}6$, и $\tilde{v}=\frac{4}{3}c$. При большой, но досветовой скорости реального перемещения источника скорость видимого движения оказалась сверхсветовой.

Можно проверить (как это делают для нахождения экстремума функции), что при данной скорости движения источника v видимая скорость имеет максимальное значение при

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 = \frac{v}{c}.$$

Тогда $\sin\vartheta_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, и максимальное значение видимой скорости —

$$\tilde{v}_{max} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Скорость $\tilde{v}_{max}$ стремится к бесконечности, когда скорость реального перемещения v стремится к скорости света c.

Чтобы закончить наше рассмотрение, остается еще сравнить две величины: промежуток времени между испусканиями сигналов — $(\Delta t)_0 = t_1 = \frac{s}{v}$ — и промежуток времени между их приемами — $\Delta t = \frac{s}{v}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)$. Возможно, у читателя возникнет вопрос: почему у нас отношение $(\Delta t)_0/\Delta t$ не совпало с отношением T_0/T из формулы (1)? Куда делся множитель $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$? Дело в том, что с этим множителем, встречающимся почти во всех формулах теории относительности (его называют релятивистским корнем), связан более тонкий эффект, который в нашем простом расчете ускользает: ведь мы пользовались не теорией относительности в полном ее объеме, а только фактом конечности скорости света. Можно сказать, что мы сделали расчет в приближении, в котором пренебрегается всеми степенями величины $\frac{v}{c} < 1$ более высокими, чем первая. А формула для эффекта Доплера — это точный результат теории относительности.

Надеемся, что читатель понял, как может возникать иллюзия движений со сверхсветовыми скоростями. Но рассмотренный нами пример с фонариком — не единственная мыслимая возможность. Вот еще ситуация, в которой мы предлагаем вам разобраться самостоятельно. Пусть имеется некоторая полоса, перпендикулярная лучу зрения, которая в какой-то момент вся одновременно вспыхнула. Что будет видеть наблюдатель?

Можно рассмотреть не полосу, а вспыхивающую сферу. Это могла бы быть оболочка квазара, освещаемая его центральным источником. В этом случае картине наблюдаемого явления — увеличению в размерах светящегося пятна — будут соответствовать сверхсветовые скорости. Легко придумать и другие модели такого рода.

Гораздо труднее выяснить, какова действительная природа мощных взрывов, вспышек, выбросов, которые создают иллюзию сверхсветовых движений. Это — задача дальнейших исследований.

Информация

Заказы принимаются...

Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» является крупнейшей издательской организацией, выпускающей литературу по физико-математическим наукам.

На все издания Главной редакции физико-математической литературы, включенные в тематический план выпуска на 1989 год, гарантируется полное выполнение заказов книготорговых организаций.

Ниже приведен список книг (с краткими аннотациями), которые могут заинтересовать наших читателей. Нумерация соответствует тематическому плану. Цена — ориентировочная.

Заказать эти книги можно в ближайшем (крупном) книжном магазине или в магазине, имеющем отдел «Книга — почтой».

Математика

8. Бюллер В. Гаусс (биографический очерк): Пер. с англ. 1 р. 80 к.

Впервые на русском языке издается книга, специально посвященная жизни и творчеству К. Ф. Гаусса (1777—1855) — одного из величайших математиков в истории человечества. Много внимания уделяется историческим событиям, на фоне которых протекала нелегкая жизнь ученого.

9. Вейль Г. Математическое мышление: Пер. с англ. и нем. 2 р.

В сборник включены произведения выдающегося математика современности Германа Вейля (1885—1955), посвященные теоретико-познавательным проблемам математики, ее взаимодействиям с науками о природе, роли в исследовании внешнего мира и творчеству замечательных ученых Д. Гильберта, Ф. Клейна, Э. Нетер, А. Пуанкаре и В. Паули.

18. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. В 2-х томах. Т. I: Пер. с нем. 2 р. 50 к.

Новый перевод первого тома классического труда по истории математики девятнадцатого столетия, написанного выдающимся немецким математиком, педагогом и деятелем математического просвещения Ф. Клейном (1849—1925).

19. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени: Пер. с нем. 1 р. 90 к.

Посвящена одному из ярчайших разделов математики — геометрической теории икосаэдра и является уникальной по широте охватываемого материала и мастерству его изложения. Во второй части излагается основанная на геометрических свойствах икосаэдра теория уравнений пятой степени. На русском языке выходит впервые.

36. Гашков С. Б., Олехник С. Н., Сергеев И. Н. Примени математику. 60 к.

Рассматриваются вопросы построения и измерения ограниченными средствами, поиск оптимального решения в той или иной ситуации, способы быстрого счета, задачи на разрезание, переливание, взвешивание и т. п.

37. Костовский А. Н. Геометрические построения одним циркулем на плоскости и одним лишь сферографом в пространстве. 30 к.

Книга написана на основе лекций, которые автор в течение ряда лет читал школьникам, принимавшим участие в олимпиадах г. Львова.

38. Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. 80 к.

Содержит около 600 задач, снабженных подробными решениями, и 70 задач для самостоятельной работы. Большинство задач по своей тематике близки к школьной программе.

40. Задачи по математике. Начала анализа. 1 р. 70 к.

Методическое построение справочника позволяет углубленно повторить этот раздел математики и самостоятельно подготовиться к поступлению в вуз с повышенной математической программой. Книга создана на основе опыта преподавания математики на подготовительном отделении Московского государственного университета (механико-математический факультет).

42. Цыпкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. 1 р. 90 к.

Содержит основные методы решения задач школьного курса математики. Изложение методов сопровождается разбором типичных задач.

56. Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф от эвольвент до квазикристаллов. 80 к.

В книге, написанной на основе лекции для студентов, рассказывается о рождении современной математики и теоретической физики в трудах великих ученых XVII века.

57. Никольский С. М. Элементы математического анализа. 40 к.

Математический анализ в этой книге изучается на геометрической и физической основе. Излагаются дифференциальное и интегральное исчисления и их приложения.

Физика

89. Воробьев И. И. Теория относительности в задачах. 50 к.

Физические основы теории относительности, ее кинематика и релятивистские законы сохранения представлены взаимосвязанными задачами, сопровождаемыми обсуждением. Достаточно знаний в рамках школьной программы.

91. Майер В. В. Кумулятивный эффект в простых опытах. 50 к.

Посвящена физически очень интересному явлению — кумулятивному эффекту. Дано описание экспериментальных установок для проведения соответствующих опытов, которые читатель может провести сам.

93. Пономарев Л. И. Под знаком кванта! 1 р. 10 к.

Квантовая физика — самое выдающееся открытие XX века. Практически ни одно глубокое явление природы невозможно понять и объяснить без квантовых идей.

(Окончание см. на с. 43)

ИСТОРИЯ РОСИНКИ

Кандидат физико-математических наук
А. А. АБРИКОСОВ (мл.)

Состояние вещества бывает: твердое, капельное, паровое и воздушное.
В. Даль. Толковый словарь живого великорусского языка.

Введение

Все мы буквально на каждом шагу сталкиваемся с процессами испарения и конденсации. И хотя большинство тут же представит себе кипящий чайник, безусловно, важнейший пример — это природный круговорот воды, вне которого жизнь на Земле была бы, по меньшей мере, иной.

Итак, солнечное тепло испаряет влагу у земной поверхности, конвективные токи и диффузия позволяют парам достигнуть высоких атмосферных слоев. По мере движения вверх температура воздуха падает, пары конденсируются и образуются облака. Слияние и укрупнение капель внутри облаков завершается дождем — цикл замыкается.

Мы поговорим об одном из важнейших звеньев в этой цепочке — об образовании капелек при охлаждении водяного пара, но вначале напомним одно важное понятие.

Как вы знаете, насыщенными называются пары́, которые находятся в равновесии с жидкой фазой. Каждой температуре T соответствует свое определенное значение $p^0(T)$ давления насыщенного пара (рис. 1). Линия $p^0(T)$ разбивает плоскость p, T на области, соответствующие жидкому и газообразному состояниям.

Равновесие между жидкостью и газом представляет собой пример так называемого динамического равновесия. Через поверхность раздела происходит постоянный обмен молекулами между фазами: идут как бы встречные процессы испарения и конденсации. Если пары насыщенные, то потоки частиц в ту и другую сторону одинаковы и количество вещества в обеих фазах неизменно.

Концентрация насыщенного пара определяется скоростью испарения с единицы поверхности жидкости, т. е. плотность насыщенных паров является мерой летучести вещества.

«Телеканнибализм» в мире капель. Качественный аспект

Теперь мы можем перейти к основной теме нашей статьи — влиянию формы поверхности на равновесие жидкой и газовой фаз. Оказывается, что искривление поверхности приводит к изменению давления насыщенного пара. Давайте рассмотрим пример.

Пусть под колпаком находятся две одинаковые почти сферические капельки. Мы уже знаем, что кажущаяся неизменность такой системы обманчива. На самом деле под колпаком присутствует пар, причем молекулы, покинувшие одну каплю, легко достигают другой. Устойчиво ли в данном случае динамическое равновесие?

Привлечем сперва энергетические соображения. Свободная поверхность капли обладает энергией

$$E_S(r)=\sigma S=4\pi r^2\sigma$$

(здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, а $S=4\pi r^2$ — поверхность сферы с радиусом r). Нетрудно

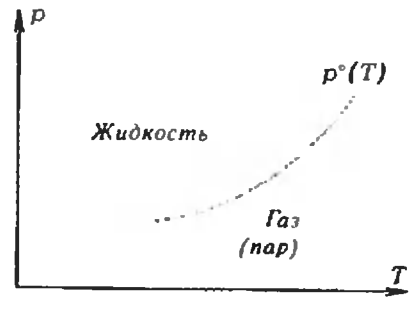


Рис. 1. Фазовая диаграмма системы жидкость — пар. Линия $p^0(T)$, разделяющая области жидкой и газовой фаз, задает зависимость давления насыщенных паров от температуры.

убедиться, что минимальную энергию имела бы одна капля с удвоенной массой, а в нашем случае общая поверхность в $\sqrt[3]{2}$ раз больше.

Теоретически это могло бы значить, что равновесие является неустойчивым. Но существует ли механизм, который привел бы к направленному переносу вещества, если в результате флуктуации симметрия вдруг нарушится и капельки станут хоть чуть-чуть неодинаковы?

Да, такой механизм есть. Мы покажем, что скорость испарения зависит от того, какую форму имеет испаряющая поверхность. На поверхности большей кривизны (у маленькой капли) этот процесс идет интенсивнее. В свою очередь встречный поток молекул (конденсация) определяется только плотностью паров под колпаком и одинаков для обеих капель. Поэтому, если радиусы капель отличаются, капли не могут одновременно находиться в равновесии с паром. При этом бóльшая капля окажется более устойчивой и сможет постепенно поглотить меньшую, даже не прикасаясь к ней. Такое «поедание» на расстоянии можно было бы назвать телеканнибализмом.

Математическое обоснование. Формула Кельвина

Закон сохранения энергии позволяет вычислить поправку к давлению паров, обусловленную искривлением поверхности. Рассмотрим машину, изображенную на рисунке 2. Она представляет собой «вечный двигатель», единственным недостатком которого является, по мнению изобретателя, лишь малая развиваемая мощность.

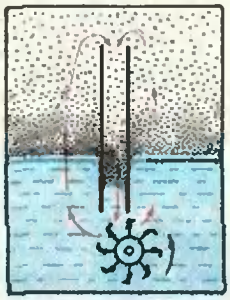


Рис. 2. «Вечный двигатель». Из-за разности уровней жидкости в сосуде и в капилляре давление паров над выпуклым мениском больше $p^0(T)$. Не приведет ли это к круговороту в системе?

Парижская академия наук не рассматривает подобные проекты уже более двух веков (с 1775 года). Закон сохранения энергии гарантирует их неработоспособность. Но порой оказывается полезно разобраться, где именно допустил ошибку изобретатель, какой конкретный физический принцип он не учел. Методически это напоминает доказательства от противного, общепринятые в математике.

Идея этого perpetuum mobile такова. В сосуд с легко летучей жидкостью погружен капилляр из несмачиваемого материала. Уровень жидкости в капилляре будет ниже, чем в основном резервуаре, на величину

$$h=\frac{2\sigma}{\rho_ж g r},$$

где $\rho_ж$ — плотность жидкости, r — радиус капилляра, g — ускорение свободного падения. Пары жидкости непосредственно над ее поверхностью имеют давление $p^0(T)$, а над мениском в капилляре их давление будет больше на величину

$$\Delta p=\rho^0 g h,$$

где ρ^0 — плотность насыщенных паров (согласно уравнению Клапейрона — Менделеева, $\rho^0=\frac{p^0(T)M}{RT}$).

По замыслу изобретателя избыток паров вызовет усиленную конденсацию в капилляре, и вследствие этого в системе возникнет круговорот жидкости.

Такое рассуждение содержит единственное слабое место: автор не учел эффект, о котором мы говорили в предыдущем разделе. Сравним молекулы, находящиеся вблизи поверхности жидкости в резервуаре и в капилляре (рис. 3). Очевидно, что в случае *а*) молекула имеет большее число соседей, с которыми ее связывают межмолекулярные силы. А это значит, что в случае *б*) молекуле проще покинуть жидкость, интенсивность испарения выше, и для компенсации необходим более мощный встречный поток частиц.

(а) (б)

Рис. 3. Молекула, находящаяся вблизи выпуклой поверхности, связана с меньшим числом соседей. Это облегчает испарение.

Закон сохранения энергии утверждает, что направленный круговорот в системе отсутствует. Мы приходим к выводу, что равновесное давление паров над выпуклой поверхностью жидкости равно

$$p_{\cap}(r)=p^0(T)+\Delta p=p(T)+\frac{2\sigma}{r}\frac{\varrho^0(T)}{\varrho_ж}. \qquad (*)$$

(Обратите внимание, что ускорение свободного падения g не вошло в конечный ответ, хотя и присутствовало в промежуточных выкладках.)

Анализ вечного двигателя — это прием, который позволил нам кратчайшим путем достичь цели. Зато полученная формула имеет универсальный характер: для данной жидкости давление паров зависит не только от температуры, но и от кривизны поверхности.

Пусть теперь поверхность раздела имеет вогнутую форму. Установив в нашем perpetuum mobile смачиваемый капилляр, мы немедленно получаем результат, в котором добавка Δp имеет противоположный знак:

$$p_{\cup}(r)=p^0(T)-\frac{2\sigma}{r}\frac{\varrho^0(T)}{\varrho_ж}.$$

При не слишком малых радиусах кривизны наши соотношения эквивалентны более точному уравнению

$$p(r)=p^0(T)e^{\frac{2\sigma}{r}\frac{M}{\varrho_ж RT}},$$

полученному в 1871 году лордом Кельвином. Радиус кривизны берется со знаком «+» для выпуклой поверхности и со знаком «−» для вогнутой.

Можно найти характерное для данной жидкости значение радиуса кривизны, при котором поправка к давлению становится сравнима с давлением пара над ровной поверхностью:

$$r_0(T)=\frac{2\sigma}{p^0(T)}\frac{\varrho^0}{\varrho_ж}=\frac{2\sigma M}{\varrho_ж RT}=\frac{2\sigma V_ж}{RT}$$

(здесь $V_ж$ — молярный объем жидкой фазы). Величина r_0 зависит только от температуры, ибо функциями температуры являются σ и $V_ж$.

Первые числовые оценки

Давайте обсудим величину обнаруженного эффекта и выясним, играет ли он сколь-нибудь заметную роль в реальной жизни. В таблице приведены значения σ, $\varrho_ж$, ϱ^0, p^0 и r_0 для воды при различных температурах. На первый взгляд кажется, что радиус r_0 удручающе мал, просто ненаблюдаем (ведь он в несколько сот раз меньше длины волны видимого света). Однако шарик такого размера содержит

Таблица

T, К	$\sigma\cdot10^3$, Дж/м^2	$\varrho_ж\cdot10^{3}$, кг/м^3	$\varrho^0\cdot10^3$, кг/м^3	p^0, Па	$r_0\cdot10^9$, м
273	75,5	1,00	4,88	611	1,2
293	72,5	1,00	17,3	$2{,}33\cdot10^3$	1,1
373	58,8	0,96	598	$1{,}013\cdot10^5$	0,7

$$N(r_0)=\frac{4}{3}\pi r_0^3\varrho_ж\frac{N_A}{\mu}\sim10^2 \text{ молекул воды}$$

($N_A=6{,}06\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро). Нельзя не порадоваться этому результату, и вот почему.

При выводе основной формулы мы неявно предполагали, что система является макроскопической. Говорить о поверхностном натяжении и давлении паров можно только при условии, что искривленный участок поверхности содержит достаточно большое количество молекул. Полученное значение $N(r_0)$ свидетельствует, что это справедливо практически для всех $r>r_0$.

Подумаем, где же могут практически проявиться свойства искривленных менисков? Разумеется, безнадежно пытаться вытянуть одиночный капилляр радиуса r_0. Но в нашем случае можно обойтись и менее экзотическими средствами.

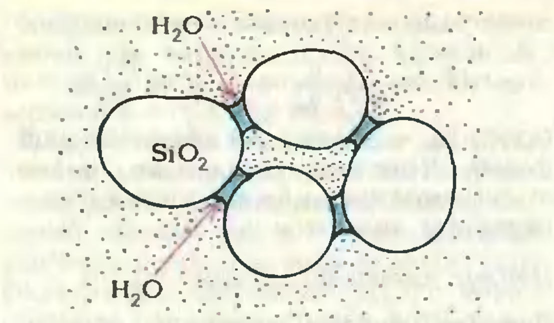


Рис. 4. Силикагель высушивает окружающий воздух. Влага собирается в узких промежутках между зернами.

Заметим прежде всего, что вовсе не обязательно иметь правильную капиллярную сеть, можно попробовать воспользоваться пористым веществом. Примером могут служить силикагели — материалы, состоящие из спекшихся гранул SiO_2 — вещества, смачиваемого водой. Размеры гранул колеблются от $2 \cdot 10^{-7}$ до 10^{-6} см, а промежутки между ними еще меньше, порядка r_0 (рис. 4). Если водяные пары могут беспрепятственно проникать в пространство между зернами, то над таким веществом давление паров должно уменьшиться в несколько раз. С помощью силикагелей удается создавать сухую атмосферу для хранения гигроскопичных веществ, защиты металлов от коррозии. Силикагели можно эффективно использовать для очистки воздуха от газов и от других примесей как в промышленных установках, так и в бытовых, например в кухонных воздухоочистителях.

Реальная значимость воображаемой поверхности

Другой пример влияния границы раздела на свойства системы жидкость — пар мы встретим там, где эта граница еще не образовалась, а именно — в пересыщенном паре.

Если насыщенный пар контактирует с жидкостью, то охлаждение или сжатие неминуемо приводят к конденсации. Состояния такой системы описываются точками $p^0(T)$ фазовой диаграммы (см. рис. 1). Однако, когда жидкая фаза отсутствует, изотермически сжимая пары или же охлаждая их при постоянном объеме, можно их перенасытить. Формула (*) позволяет лучше понять, что это значит.

Пары, давление которых превосходит $p^0(T)$, будут насыщенными по отношению к капелькам радиуса

$$r(p)=\frac{2\sigma}{p-p^0(T)}\frac{v^0}{v_ж}=\frac{p^0(T)}{p-p^0(T)}\,r_0(T).$$

Такие капли называются критическими зародышами. Напомним, что капельки меньших размеров охотно испаряются.

Количество молекул внутри зародыша равно

$$N(r)=\left(\frac{p^0}{p-p^0}\right)^3 N(r_0).$$

Если степень пересыщения водяного пара составляет 10 % $\left(\frac{p-p^0}{p^0}=0{,}1\right)$, то $N(r)\sim 10^5$ молекул. В газовой фазе такое же количество молекул занимает объем в несколько тысяч раз больший, чем в жидкой. Легко видеть, что образование критического зародыша тут весьма затруднено, так как едва ли молекулы пара вдруг захотят так сильно «потесниться». Поэтому пересыщенный пар может «застрять» в своем энергетически невыгодном, так называемом метастабильном состоянии довольно надолго.

В действительности процесс конденсации проходит немного по-другому. Попробуем оценить характерный размер капелек, с которых начинается образование тумана и выпадение ночной росы. Предположим, что накануне вечером влажность воздуха была 100 %, т. е. парциальное давление пара в воздухе было $p^0(T_в)$, где $T_в$ — вечерняя температура. К утру температура понизилась на ΔT градусов. При температуре $T_у=T_в-\Delta T$ пар, имеющий давление $p^0(T_в)$,— пересыщенный, ведь давление насыщенного пара убывает с температурой, и $p^0(T_в)>p^0(T_у)$.

Чтобы определить размер зародыша в этих условиях, нам надо прежде всего знать зависимость давления насыщенного пара от температуры. Эта связь задается уравнением Клапейрона — Клаузиуса:

$$\frac{dp^0(T)}{dT}=\frac{q}{T(V_п-V_ж)}.$$

Здесь q — молярная теплота испарения данной жидкости, $V_ж$ и $V_п$ — молярные объемы жидкости и ее насыщенного пара.

Значит, при уменьшении температуры на ΔT давление превысило равновесное на

$$\Delta p=\frac{q}{T_в(V_п-V_ж)}\Delta T,$$

и радиус критического зародыша —

$$r\approx\frac{2\sigma}{q}V_ж\left(\frac{T}{\Delta T}\right).$$

Для начальной температуры 293 К ($\sigma=72{,}5\cdot10^{-5}$ Дж/м^2, $q=44{,}0\times\times10^3$ Дж/моль) при типичном суточном перепаде температур примерно в 5 градусов это даст $r\approx3r_0$.

Как мы теперь понимаем, образование чисто флуктуационным путем зародыша, содержащего $N\approx6\cdot10^3$ молекул, маловероятно. Приходится сделать вывод о существовании какого-то механизма, облегчающего конденсацию.

Древние греки учат

Герой мифа о Золотом Руне Язон засеял по приказанию царя Колхиды Ээта драконовыми зубами поле Ареса. (Нам привычней римский вариант последнего имени — Марс.) Коварный замысел Ээта открылся, когда появились всходы: семена проросли вооруженными воинами, готовыми броситься в бой с любым появившимся противником. Язона спасла хитрость, подсказанная волшебницей Медеей. Брошенный в середину поля камень отвлек внимание воинов, и они повернули оружие друг против друга.

Примерно так выглядит подлинная картина разрушения метастабильной фазы. В любой реальной среде всегда есть какие-нибудь неоднородности. В лабораторном сосуде ими могут быть дефекты или загрязнения стенок, в атмосферном воздухе — микроскопические пылинки. При охлаждении конденсация начнется именно вблизи этих центров, которые играют роль зародышей и стимулируют переход в стабильную фазу. Поэтому метастабильные состояния редко наблюдаются в естественных условиях. Их лабораторное изучение требует чрезвычайно тщательной подготовки, ибо чем дальше находится система от положения равновесия, тем меньшие неоднородности и дефекты становятся опасны.

Взгляд с высоты

Попробуем немного отвлечься от жизненного, но чересчур конкретного примера и обобщить наши результаты. Оказывается, они имеют отношение не только к рассмотренному переходу газ — жидкость, но и практически ко всем фазовым переходам I-го рода*). По сути дела речь идет об эффектах, обусловленных дополнительной энергией на границе раздела фаз. При небольшой неравновесности фазовый переход может начаться только вблизи чужеродных дефектов, а критический размер зародыша обратно пропорционален степени отклонения от равновесия. Вот поэтому росным летним утром в воздухе нет ни пылинки, а зимой мороз украшает инеем мельчайшие веточки.

Такая чувствительность метастабильных состояний к присутствию зародышей нашла практическое применение. Долгое время для регистрации элементарных частиц применялась камера Вильсона, в которой рабочим веществом служили переохлажденные пары какой-нибудь жидкости. Прохождение сквозь камеру заряженной частицы вызывало конденсацию и делало след частицы видимым. Сейчас камеру Вильсона сменили более чувствительные пузырьковые камеры. В них используют для регистрации более плотную среду — перегретую жидкость (например жидкий водород). В ней треки частиц

*) Фазовыми переходами первого рода называют переходы из одного фазового состояния в другое, при которых скачком меняются такие характеристики вещества, как плотность, концентрация; в единице массы при этом выделяется или поглощается вполне определенное количество теплоты. К таким переходам относятся испарение и конденсация, плавление и затвердевание, сублимация и конденсация в твердую фазу и т. п.

проявляются в виде цепочек пузырьков (водород вскипает).

Другой пример — это выращивание высококачественных монокристаллов. Небольшой монокристалл-затравку погружают в почти равновесный расплав, где он становится единственным кристаллизационным центром. (В отсутствие затравки удается охладить расплав до $T \approx 0{,}5\ T_{\text{плавления}}$, прежде чем начнется кристаллизация. Но, увы, расплачиваться за высокое качество кристалла приходится длительным временем роста. Чтобы вырастить большой монокристалл, нужно несколько недель, а то и месяцев.

Заключение, но не финал

Прежде чем поставить точку, выясним еще один вопрос. До сих пор мы обсуждали, с чего начинается образование капель. Но когда оно заканчивается? Почему утром все росинки так похожи? Что останавливает их рост? Ведь мы убедились, что чем больше радиус капли, тем охотнее она «пьет». По-видимому, существует какой-то дополнительный фактор, определяющий максимальный размер.

Слишком далеко искать не нужно. Дело в том, что мы пока нигде не учитывали действие на росинки силы тяжести. Однако сплюснутая форма крупных капель словно намекает, что это не всегда допустимо.

Попробуем оценить, до каких пор можно пренебрегать гравитационной энергией. Для сферической капли она равна

$$E_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g r$$

и, будучи пропорциональна r^4, неминуемо должна превзойти поверхностную энергию $E_S = 4\pi r^2\sigma$ при увеличении r.

Чтобы найти предельное значение радиуса, приравняем энергию росинки суммарной энергии двух «половинных» капель, на которые она могла бы распасться:

$$E(1) = 4\pi r^2\sigma + \frac{4}{3}\pi r^4 \varrho g =$$

$$= 2\left(4\pi\left(\frac{r}{\sqrt[3]{2}}\right)^2\sigma + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r}{\sqrt[3]{2}}\right)^4 \varrho g\right) = 2E\left(\frac{1}{2}\right)$$

($r/\sqrt[3]{2}$ — радиус «половинной» капли). Отсюда следует, что

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{3\sqrt[3]{2}\sigma}{\varrho g}} \approx 0{,}5\ \text{см}.$$

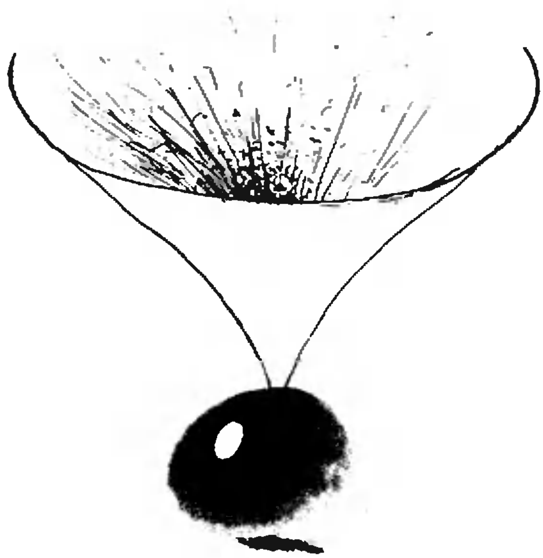
На первый взгляд — многовато для росинки. Но, разумеется, мы не учли всех факторов. В частности, размер капли зависит от того, на какой поверхности она образуется, насколько смачиваема эта поверхность водой. Да и, кроме того, слишком большие капли просто не могут удержаться на листах и травинках и скатываются с них. Однако по порядку величины приведенная оценка вполне достоверна.

Тут, пожалуй, стоит прервать наш рассказ. Не потому, что он завершен, завершилась история одной только росинки. Но даже в этой капле воды мы видим, что в науке никакой шаг не бывает последним.

За каждым ответом подстерегает вопрос: что же дальше?

У капель — тяжесть запонок,
И сад слепит, как плёс,
Обрызганный, закапанный
Мильоном синих слёз.

Б. Пастернак



Задачник „Кванта"

Задачи

M1111—M1115, Ф1123—Ф1127

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 октября 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1111» или «Ф1123». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M1111. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C, пересекают касательную, проведенную в точке B, соответственно в точках M и N. В треугольнике ABC проведена высота BP (точка P лежит на стороне AC). Докажите, что прямая BP является биссектрисой угла MPN.

Б. И. Чинин

M1112. На доске написаны два числа: 1 и 2. Разрешается дописывать новые числа следующим образом: если на доске имеются числа a и b, то можно написать число $ab+a+b$. Можно ли этим способом получить а) число 13121; б) число 12131?

Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде

в) $x+y+xy$, г) $x+y+2xy$ с натуральными x и y.

А. А. Берзиньш, В. Г. Ильичев

M1113*. В стране 21 город. Авиационное сообщение между ними осуществляют несколько авиакомпаний, каждая из которых обслуживает 10 беспосадочных авиалиний, связывающих попарно некоторые пять городов (при этом между двумя городами могут летать самолеты нескольких компаний). Каждые два города связаны по крайней мере одной беспосадочной авиалинией. При каком наименьшем количестве авиакомпаний это возможно?

Д. В. Фомин

M1114. Докажите, что для любого тетраэдра имеет место неравенство

$$r<\frac{ab}{2(a+b)},$$

где a, b — длины двух скрещивающихся ребер, а r — радиус вписанного шара.

И. Ф. Шарыгин

M1115*. а) В первой строке написаны 19 натуральных чисел, не превосходящих 88, а во второй строке — 88 натуральных чисел, не превосходящих 19. Назовем отрезком одно или несколько подряд написанных чисел одной строки. Докажите, что из данных строк можно выбрать по отрезку так, что суммы чисел в них равны.

б) Пусть n, m, k — натуральные числа. Докажите, что если

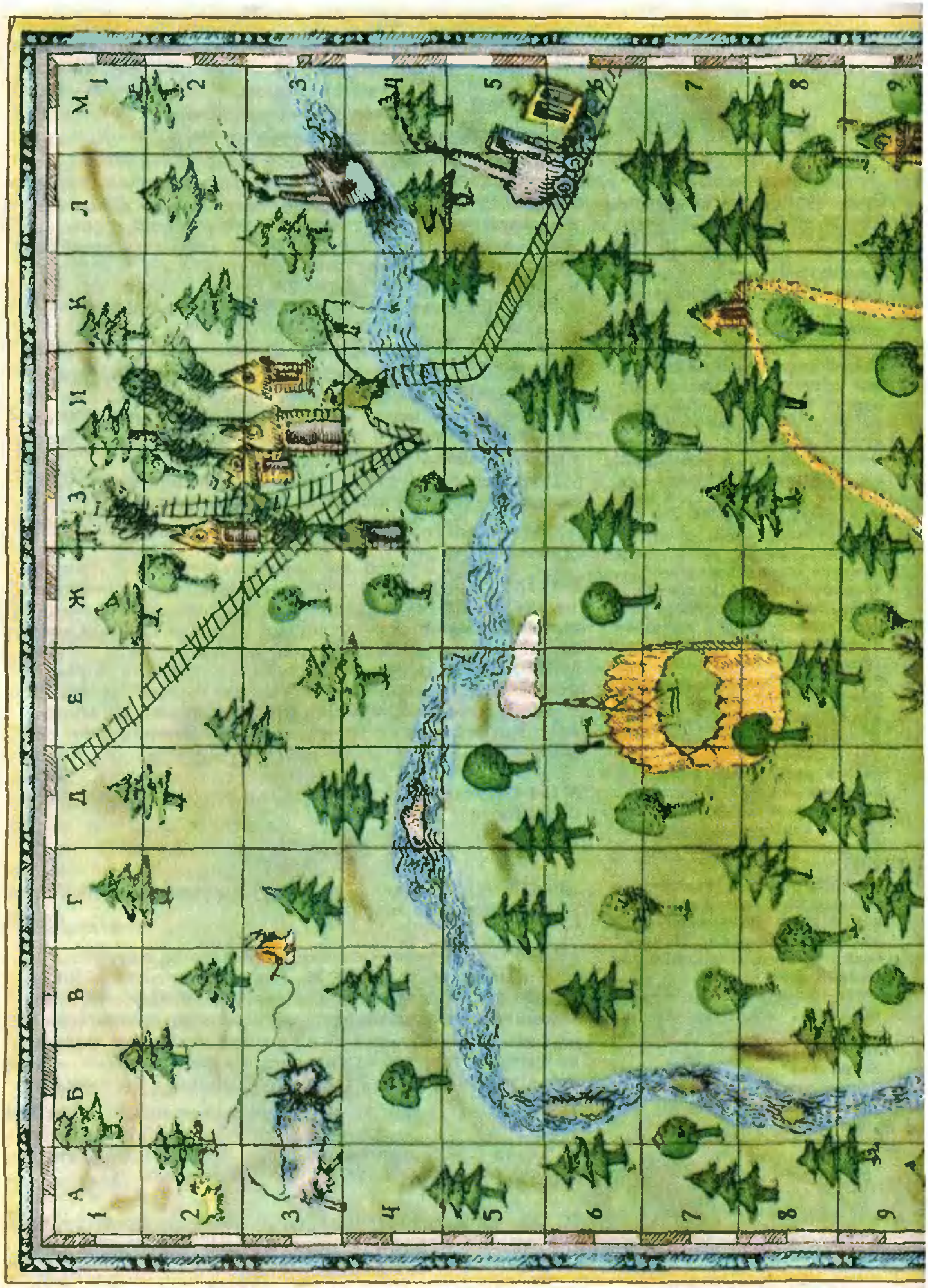
$$1+2+...+n=mk,$$

то числа 1, 2,..., n можно разбить на k групп так, чтобы суммы чисел в каждой группе были равны m.

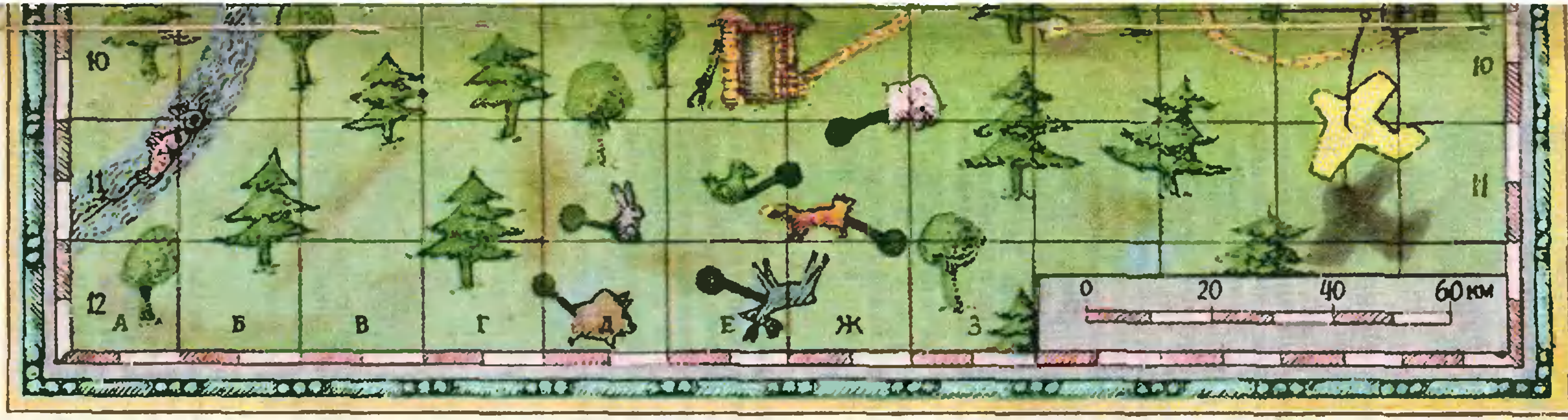
А. В. Анджанс

Ф1123. К концу вертикальной водопроводной трубы при помощи короткого отрезка резиновой трубки прикреплена стальная насадка массой M. При каком рас-

(Продолжение см. на с. 34)



А
Б
В
Г
Д
Е
Ж
З
И
К
Л
М
1
2
3
4
5
6
7
8
9



Самолет-разведчик пожарной авиации вылетел на дежурство. Лето было очень сухое, и лесные пожары, к сожалению, стали частым явлением. Сильная гроза в день дежурства еще увеличила вероятность возникновения пожара, поскольку сопровождалась лишь незначительными дождями. Гроза не позволяла самолету двигаться по намеченному маршруту и вносила помехи в радиосвязь с землей. Вот что записал диспетчер.

12.00. Нахожусь в центре квадрата Л—11, курс.....), скорость 200 км/ч. Буду держать эту скорость в течение всего полета.*
12.30 Пролетаю охотничью избушку; пока все в порядке.
13.00. Выполняю поворот на .....
13.30. Слева в 15 км от меня метеорологическая вышка, все в порядке.
14.00. Выполняю поворот на 90° влево.
14.30. Выполняю поворот.......
15.00. Пересекаю реку Синяя.
15.30. Выполняю поворот на 90° ......
15.45. Выполняю поворот на 90° направо.
16.00. Пролетаю над рекой Синяя.
16.18. Подо мной лесной пожар. Высылайте помощь. Мои координаты ....

В какой квадрат диспетчер должен послать пожарников?

Калейдоскоп „Кванта"

*) Многоточие соответствует грозовым помехам.

Задачник «Кванта»

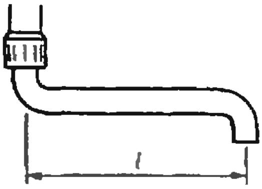


Рис. 1.

ходе воды насадка будет горизонтальной (рис. 1)? Площадь сечения трубы S, длина ее l. Трением пренебречь.

М. Г. Гаврилов

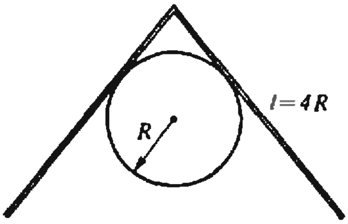


Рис. 2.

Ф1124. На гладкое горизонтальное бревно радиусом R кладут сверху «книжку», составленную из двух однородных тонких квадратных пластинок со стороной $l=4R$. Пластины скреплены при помощи невесомого шарнирного стержня. Какой угол образуют пластины в положении равновесия (рис. 2)? Будет ли это положение равновесия устойчивым?

С. С. Кротов

Ф1125. Вертикальный теплоизолированный сосуд, в котором находится одноатомный газ, закрыт поршнем массой M. В сосуде включают нагреватель мощностью N, и поршень начинает медленно двигаться вверх. За какое время он поднимется на высоту H относительно начального положения? Теплоемкостью поршня, трением и давлением атмосферы пренебречь.

А. Р. Зильберман

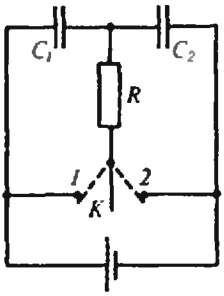


Рис. 3.

Ф1126. В схеме, изображенной на рисунке 3, ключ K «колеблется» между положениями *1* и *2* с частотой $f=100$ Гц; в каждом положении ключ находится одинаковое время. Найти ток через резистор. $C_1=10$ мкФ, $C_2=30$ мкФ, $R=100$ кОм.

А. Р. Зильберман

Ф1127. Фонарик испускает пучок лучей, сходящихся на расстоянии $R_0=1$ м от него в маленькое пятно. На пути луча поместили два плоских зеркала квадратной формы так, что линия их соприкосновения пересекает ось пучка на расстоянии $r=70$ см от фонарика и перпендикулярна этой оси. Плоскости зеркал перпендикулярны друг другу, а одно из зеркал составляет угол $\alpha=30°$ с осью пучка. На каком расстоянии от фонарика сойдется теперь пучок?

М. М. Цыпин

Problems

M1111—M1115, P1123—P1127

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution reguires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solu-

M1111. The tangents to the circumcircle of triangle ABC at the points A and C intersect the tangent drawn from B at the points M and N respectively. Show that the altitude BP of triangle ABC (where P is on AC) is the bissector of angle MNP.

B. I. Chinik

M1112. The numbers 1 and 2 are written on the blackboard. Additional numbers may be written according to the following rule: if the numbars a and b are already on the board, then the number $ab+a+b$ may be added. Is it possible to obtain the numbers a) 13121; b) 12131 in this way? Prove that there are infinitely many nonnegative in tegers which cannot be represented as c) $x+y+xy$, d) $x+y+2y$ with nonnegative integers x and y.

A. A. Berzins, V. G. Il'ichev

tions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 1st, 1988 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».
Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KWANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in block letters.

Задачник „Кванта"

M1113*. There are 21 cities in a certain country. Air travel between these cities is handled by several airlines, each of which has 10 (back and forth) flights directly linking 5 cities (more than one airline may have flights between two given cities). Any two cities are linked by at least one direct (two-way) flight. For what least number of airlines is this possible?

D. V. Fomin

M1114. Prove that for an arbitrary tetrahedron we have

$$r < \frac{ab}{2(a+b)},$$

where a and b are the lengths of two opposite edges and r is the radius of the insribed sphere.

I. F. Sharygin

M1115*. a) Nineteen natural numbers no greater than 88 are written in one line and 88 numbers no greater than 19 in another. By a segment we mean a sequence of successive numbers in the same line. Prove that it is possible to choose segments (one in each line) with equal sums of numbers. b) Suppose n, m, k are natural numbers ($m \geqslant n$). Prove that if

$$1+2+\ldots+n=mk,$$

then the numbers 1, 2, ..., n can be split into k groups so that the sum of numbers in each group equals m.

A. V. Andjans

P1123. A metallic faucet of mass M is fixed to the extremity of a water supply line by means of a rubber pipe. For what intensity of water flow will the faucet be horizontal (see figure Рис. 1)? The section area of the pipe is S, its length is l. Friction is negligible.

M. C. Gavrilov

P1124. A „book", consisting of two homogeneous thin square plates of side $l=4R$ joined by a weightless hinge, are placed on a smooth horizontal log of radius R. What will the angle between the plates be in the equilibrium position (see figure Рис. 2)? Will the equilibrium be stable?

S. S. Krotov

P1125. A vertical heat-isolated receptacle containing monoatomic gas is closed by a piston of mass M. A heater of power N is turned on inside the receptacle, and the piston slowly begins to move up. How much time will elapse until it moves up to height H from the initial position? The piston's heat capacity, friction and atmospheric pressure are negligible.

A. R. Zilberman

P1126. In the circuit shown on figure Рис. 3, the switch K is turned back and forth between the positions *1* and *2* with frequency $f=100$ Hz, staying in each position for an equal length of time. Find the current through the resistor, if $C_1=10$ mcF, $C_2=30$ mcF, $R=100$ kOhms

A. R. Zilberman

P1127. A flashlight emits a light beam which converges to a small spot at the distance $R_0=1$ m from it. Two square plane mirrors are placed in the beam's path so that the line along which they touch intersects the beam's axis at the distance $r=70$ cm from the flashlight and is perpendicular to the axis. The planes of the mirrors are perpendicular and one of them forms the angle $\alpha=30°$ with the beam's axis. At what distance from the flashlight will the beam now converge?

M. M. Tsipin

Задачник „Кванта"

Решения задач

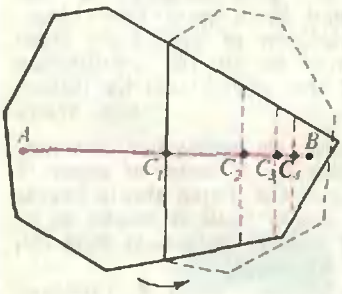
M1091 — M1095, Ф1103 — Ф1107

M1091. *Назовем натуральное число удачным, если цифры в его десятичной записи можно разбить на две группы так, что суммы цифр в этих группах равны.*
а) Найдите наименьшее число a такое, что числа a и $a+1$ — удачные.
б) Существует ли такое a, что числа a, $a+1$ и $a+2$ — удачные?

а) Ответ: $a=549$. Очевидно, сумма цифр любого удачного числа четна. Поэтому, если a и $a+1$ — удачные числа, то a оканчивается на 9 (иначе суммы цифр этих двух чисел имеют разную четность). Ясно, что a не может быть двузначным ($99+1=100$). Если число a — трехзначное, т. е. $a=\overline{xy9}$ (черта означает десятичную запись), то $y<9$ и $a+1=\overline{x(y+1)0}$. Следовательно, $x+y=9$, $x=y+1$. Отсюда $x=5$, $y=4$.
б) Ответ: не существует. Как видно из решения задачи а), оба числа — a и $a+1$ — должны оканчиваться на 9, но это невозможно.

Н. И. Зильберберг

M1092. *Вырезанный из бумаги выпуклый многоугольник 10 раз складывают (перегибая по некоторым прямым) и затем разрезают по прямой. Какое наибольшее число кусков может получиться?*



Ответ: 1025. Решим задачу сразу в общем случае для n сгибов. Проведем внутри многоугольника произвольный отрезок AB и отметим на нем точки C_1, C_2, ..., C_{n+1} такие, что $C_kB=2^{-k}\cdot AB$ (см. рисунок). Через каждую из точек C_k проведем прямую l_k перпендикулярно к AB. Последовательно перегнем многоугольник по прямым l_1, l_2, ..., l_n слева направо n раз (мы считаем, что первоначально точка A лежит левее B) и разрежем его по прямой l_{n+1}. Отрезок AB сложится в отрезок C_nB, на котором сложенная фигура имеет 2^n слоев. Слева от разреза каждый слой соединен с другим слоем через перегиб l_n, поэтому слева мы получим 2^{n-1} кусков. Справа от разреза слои также попарно соединены, за исключением двух одиночных нижних слоев — краев исходной фигуры. Поэтому справа получится $2^{n-1}+1$ кусков, а всего получится 2^n+1 кусков.

Покажем индукцией по числу перегибов n, что число кусков не может быть больше 2^n+1. При $n=0$ это утверждение очевидно. Пусть оно верно для n перегибов. Перегнем многоугольник $n+1$ раз. После первого перегиба получатся два соединенных между собой частично перекрывающихся многоугольных слоя. В дальнейшем каждый из этих слоев можно рассматривать отдельно: он будет перегнут n раз и разрезан, что по предположению индукции даст 2^n+1 кусков. Поскольку хотя бы два куска из разных слоев должны быть соединены через первый перегиб, общее число кусков не превосходит $2(2^n+1)-1=2^{n+1}+1$.

Таким образом, максимальное число кусков равно 2^n+1; в частности, при $n=10$ получится $2^{10}+1=1025$ кусков.

С. В. Казаков

M1093. *На окружности в n точках расставлены числа 0, 1, 2. Затем одновремен-*

Ответ в задаче а): $n-k+1$.
а), б) Разобьем точки на «серии», каждая из которых начинается с двойки и включает все идущие следом

но во всех точках производится следующее преобразование: каждое число 2 заменяется на 0, а затем к следующему за ним по часовой стрелке числу прибавляется 1. Пусть вначале количество двоек равнялось $k\geqslant 1$.

а) Через какое количество преобразований заведомо не останется ни одной двойки?

б) Пусть, кроме того, в $n-k$ остальных точках вначале стояли единицы. Докажите, что в конце концов останется k единиц и $n-k$ нулей.

(по часовой стрелке) единицы. Если серия начинается в точке A_1, заканчивается перед точкой A_2 (где стоит двойка или ноль — на рисунке 1 это обозначено звез-

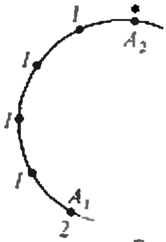


Рис. 1.

A_1	A_2
2	•
0	1

а)

A_1		A_2
2	1	•
∅	2	0
∅	0	1

б)

A_1					A_2
2	1	1	1	1	•
∅	2	1	1	1	0
∅	0	2	1	1	0
∅	0	0	2	1	0
∅	0	0	0	2	0
∅	0	0	0	0	1

в)

Рис. 2.

дочкой) и включает $m\geqslant 0$ единиц, то через $m+1$ шагов в m точках, следующих за A_1, будут стоять m нулей, а в точке A_2 — единица. На рисунках 2, *а*, *б*, *в* изображена эволюция одной серии для $m=0$, $m=1$ и $m=4$ ($\varnothing$ означает 0 или 1). Такая эволюция происходит одновременно со всеми сериями. Таким образом, если вначале было k двоек в точках A_1, A_2, ..., A_k и самая длинная серия содержала $m\leqslant n-k$ единиц, то ровно через $m+1$ преобразований не останется ни одной двойки. Если при этом в остальных $n-k$ точках стояли единицы, то после всех преобразований на их местах будут стоять нули, а в k точках A_1, A_2, ..., A_k — единицы.

Н. Б. Васильев

М1094. *Пусть a, b, c — неотрицательные числа.*

а) Докажите, что из неравенства

$$a^4+b^4+c^4\leqslant \leqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \qquad (1)$$

следует неравенство

$$a^2+b^2+c^2\leqslant \leqslant 2(ab+bc+ca). \qquad (2)$$

б) Верно ли обратное: из неравенства (2) следует неравенство (1)?

а) Преобразуем разность правой и левой частей (1):

$$D=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)=4a^2b^2-(a^2+b^2)^2+ +2c^2(a^2+b^2)-c^4=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2.$$

Если $D\geqslant 0$, то $2ab\geqslant |a^2+b^2-c^2|$. Поскольку буквы a, b, c входят в условие совершенно симметричным образом, можно считать $a\geqslant b\geqslant c$. Тогда

$$a^2+b^2+c^2=|a^2+b^2-c^2|+2c^2\leqslant 2ab+2c^2\leqslant 2(ab+bc+ca).$$

б) Ответ: не верно. (Пример: $a=4$, $b=c=1$.)

Заметим, что, продолжив преобразования разности D, можно разложить ее на линейные множители:

$$D=(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

Здесь лишь одна скобка (в которой вычитается наибольшее из чисел a, b, c) может оказаться отрицательной. Таким образом, (1) эквивалентно условию, что каждое из чисел a, b, c не больше суммы двух других. Аналогично, (2) эквивалентно тому, что каждое из чисел $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ не больше суммы двух других. Отсюда легко получить другое решение задачи а): ведь если $b+c\geqslant a$, то $(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\geqslant b+c\geqslant a$ и $\sqrt{b}+\sqrt{c}\geqslant\sqrt{a}$.

Выражение D встречается в формуле Герона для площади треугольника со сторонами a, b, c (эта площадь равна $\sqrt{D}/4$); такой треугольник существует, если $D>0$.

В. А. Сендеров

M1095*. *На плоскости задана окружность с центром O и две точки A, B (отличные от O) такие, что прямая AB проходит через точку O. Постройте хорду MN этой окружности, которая видна из точки A под заданным углом α и*
а) параллельна прямой AB;
б) проходит через точку B. (Если B лежит вне окружности, то через B должно проходить продолжение хорды MN.)

а) Пусть искомая хорда MN построена (рис. 1). Проведем окружность AMN и обозначим через C и M_1 точки ее пересечения с прямыми AB и MO ($C \neq A$, $M_1 \neq M$). Согласно приведенной на рисунке 2 хорошо известной теореме,

$$OM_1 \cdot OM = OA \cdot OC;$$

но, очевидно, $OC = OA$, поэтому $OM_1 = OA^2/R$, где $R = OM$ — радиус исходной окружности. Таким образом, длина отрезка OM_1, а с ней и длина отрезка MM_1, *полностью определяется положением точки A относительно исходной окружности и не зависит от угла MAN.* Ввиду этого, чтобы построить отрезок длины MM_1, мы можем нарисовать п р о и з в о л ь н у ю хорду MN, параллельную AB (не заботясь об угле MAN), и взять точку пересечения M_1 прямой OM с окружностью AMN;

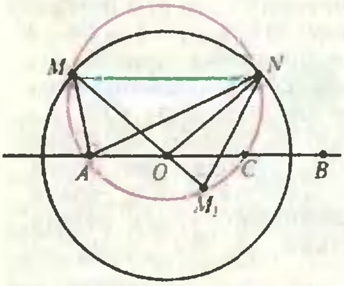


Рис. 1.

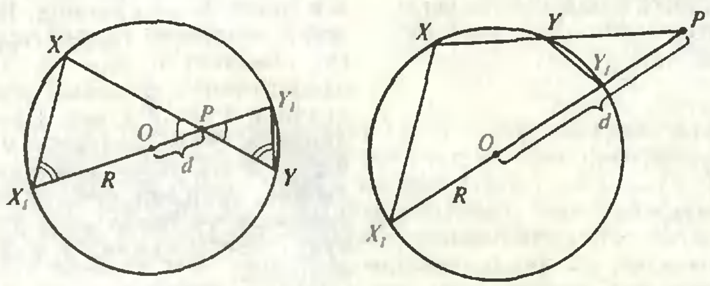


Рис. 2.

Для любой прямой, проходящей через произвольную данную точку P и пересекающей данную окружность, $PX \times PY = |d^2 - R^2|$, где X и Y — точки пересечения, $d = PO$ — расстояние от P до центра O окружности, R — радиус окружности. (Из подобия треугольников PXX_1 и PY_1Y следует, что $PX \cdot PY = PX_1 \times PY_1 = (d+R)|d-R|$.)

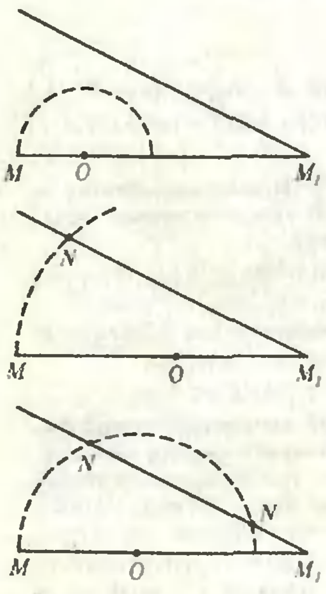


Рис. 3.

по доказанному, получившийся отрезок MM_1 будет иметь нужную длину. Теперь, пользуясь тем, что для и с к о м о й хорды MN известен угол MN_1N (он равен α) и расстояния $ON = OM = R$, мы можем построить отрезок, равный этой хорде. Для этого достаточно провести луч под углом α к уже построенному отрезку MM_1 из его конца M_1 и отметить точки пересечения этого луча с данной окружностью. Таких точек может быть 0, 1 или 2 (рис. 3). Отрезки, соединяющие эти точки с M, и дают возможные значения длины искомой хорды. Остается построить в данной окружности хорду известной длины, параллельную данной прямой AB. Поскольку эта известная длина принимает 0, 1 или 2 значения, наша задача может иметь 0, 2 или 4 решения. (Читатель самостоятельно покажет, что 4 решения задача может иметь, если точка A лежит вне данной окружности; пример такой ситуации приведен на рисунке 4.)

б) Снова предположим, что искомая хорда MN построена (рис. 5). Проведем окружность AMN и обозначим через C и M_1 точки ее пересечения с прямыми AB и MO ($C \neq A$, $M_1 \neq M$). По-прежнему оказывается, что длина отрезка MM_1 не зависит от данного угла. Для доказательства нужно несколько раз применить теорему, приведенную выше (рис. 2):

$$BC\cdot BA=BM\cdot BN=BE\cdot BF,$$

где E и F — точки пересечения исходной окружности с AB; значит, положение точки C не зависит от данного угла, и снова

$$OM_1\cdot OM=OA\cdot OC.$$

Далее решение почти не отличается от решения задачи а), только на сей раз нужно строить не хорду данной длины, параллельную данной прямой, а хорду данной длины, продолжение которой проходит через данную точку. Нужно также отметить, что при некоторых расположениях точек A и B (см., например, рис. 6) угол MM_1N может оказаться равным $\pi-\alpha$, а не α.

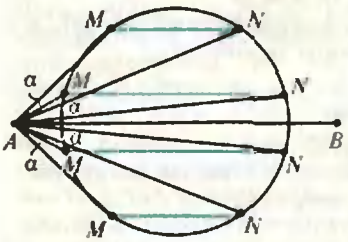


Рис. 4.

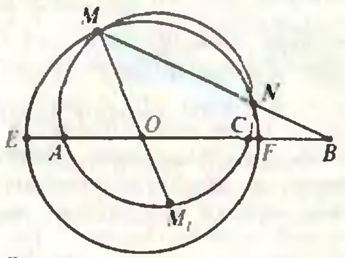


Рис. 5.

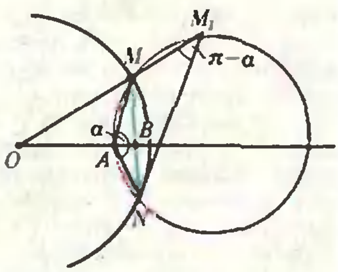


Рис. 6.

Можно избежать перебора случаев, если воспользоваться понятием «направленного угла»: угол от прямой AM до прямой AN, отсчитываемый, скажем, против часовой стрелки, всегда *будет равен* углу от M_1M до M_1N, отсчитываемому в том же направлении. По-прежнему задача имеет 0, 2 или 4 решения.

Р. О. Бурдин

Ф1103. *Математический маятник длиной l покоится в точке A на конусе с углом раствора 2β (рис. 1). Какой путь пройдет маятник до отрыва от поверхности конуса, если легким толчком маятник вывести из положения равновесия? Угол наклона конуса к поверхности земли α, поверхность конуса считается гладкой.*

Поскольку верхний конец нити закреплен, маятник до отрыва от поверхности конуса будет двигаться по окружности. Плоскость этой окружности наклонена под углом $(\pi/2-\alpha)$ к горизонту, ее радиус $r=l\sin\beta$. По мере соскальзывания с конуса скорость точки A растет, значит, должно увеличиваться и ее центростремительное ускорение. В некоторый момент действующих на маятник сил может «не хватить» для продолжения движения по окружности, и тогда произойдет отрыв точки A от поверхности конуса.

Рассмотрим силы, действующие на точку A при ее движении по конусу. Это сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ (рис. 2). В момент отрыва сила реакции обращается в нуль. Этим и воспользуемся для ответа на вопрос задачи.

Введем систему координат так, как показано на рисунке 2: *направим ось X по радиусу к центру окружности*, ось Y — по касательной к окружности и ось Z —

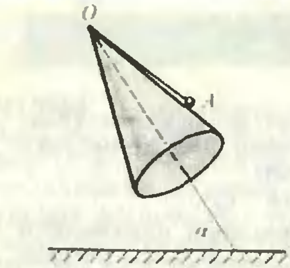


Рис. 1.

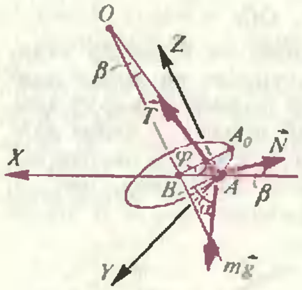


Рис. 2.

по нормали к плоскости окружности. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на каждую ось координат:

$$ma_x = mg\cos\alpha\cos\varphi - N\cos\beta + T\sin\beta,$$
$$ma_y = mg\cos\alpha\sin\varphi,$$
$$ma_z = T\cos\beta + N\sin\beta - mg\sin\alpha = 0,$$

где $a_x = v^2/r$ — центростремительное ускорение маятника, движущегося со скоростью v, a_y — его тангенциальное ускорение. Для решения нам достаточно первого и третьего уравнений. Учитывая, что из закона сохранения энергии

$$v^2 = 2gr(1-\cos\varphi)\cos\alpha,$$

получаем

$$N = mg\frac{\cos\alpha(3\cos\varphi - 2) + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\cos\beta + \sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Тогда условие отрыва принимает вид:

$$\cos\varphi = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta,$$

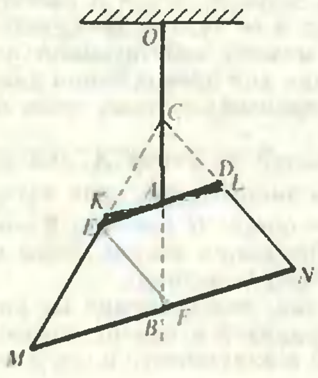
откуда находим искомый путь s, пройденный точкой A маятника до отрыва от поверхности конуса:

$$s = r\varphi = l\sin\beta\arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\right).$$

Заметим, что при $\alpha=\beta=0$ получаем известный частный случай — соскальзывание тела с вершины сферической или цилиндрической поверхности.

Л. Г. Маркович

Ф1104. *Концы двух однородных стержней привязаны друг к другу невесомыми и нерастяжимыми нитями. Один из стержней подвязали за середину к штативу. Доказать, что образованный таким образом из нитей и стержней четырехугольник является трапецией.*



Заметим, что в зависимости от длин стержней и нитей параллельными будут или стержни, или нити. Если параллельны нити, очевидно, что полученная фигура будет трапецией. Поэтому покажем, что если нити не параллельны, то параллельны стержни.

Докажем (см. рисунок), что середина стержня MN (точка B) и точка C пересечения продолжений нитей ME и DN находятся на прямой OA (A — середина стержня ED). Очевидно, что нить OA вертикальна (силы, действующие на нее, вертикальны). Далее, сила натяжения нити OA, действующая на стержень ED, и сила тяжести стержня вертикальны; поэтому из равновесия стержня следует, что силы натяжения нитей EM и DN пересекаются в точке C, лежащей на вертикали OA. Из условия равновесия стержня MN следует, что точка B также находится на вертикали OA.

Докажем теперь, что $ED \parallel MN$. Предположим, что это утверждение неверно, и проведем через точку A прямую, параллельную MN. Отрезок KL параллелен отрезку MN и в точке A делится пополам, кроме того, $\angle KAE = \angle DAL$, поэтому треугольники EKA и LAD равны. Отсюда следует, что $\angle EKA = \angle ALD$, а это неверно, так как $\angle EKA$ — внешний угол треугольника CKL, а $\angle ALD$ — внутренний. Следовательно, предположение, что ED не параллельно MN, не верно.

Найдем условие, которое позволит определить, в каком случае параллельны нити, а в каком — стержни.

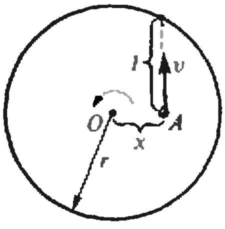
Проведем из точки E прямую $EF \parallel DN$. Условие возможности параллельности стержней эквивалентно условию возможности построения треугольника из отрезков ME и $EF = DN$ (равных длинам нитей) и отрезка $MF = |MN - ED|$ (равного разности длин стержней):

$$MF > |EM - DN|.$$

Таким образом, если разность длин стержней больше разности длин нитей, то параллельны стержни, в противном случае параллельны нити. В частности, если равны стержни, то параллельны нити, если же равны нити, то параллельны стержни. Если разности длин стержней и нитей одинаковы, то и стержни, и нити лежат на вертикали OA.

В. Т. Карапетян

Ф1105. *Металлический диск радиусом $r = 10$ см вращается в горизонтальной плоскости со скоростью $\nu = 60$ об/мин. С высоты $H = 10$ см на него падает пластмассовый брусок, масса которого много меньше массы диска. Нижняя грань бруска все время параллельна плоскости диска, коэффициент трения между металлом и пластмассой $\mu = 0{,}1$. На каком расстоянии от оси должен упасть брусок, чтобы при повторном падении он упал за пределами диска? Считать, что после отскока брусок поднимается на прежнюю высоту; размерами бруска пренебречь.*



Пусть брусок при первом падении ударяется о диск в точке A, находящейся от центра диска на расстоянии x (см. рисунок). Во время удара на брусок со стороны диска действуют две силы — направленная вертикально сила реакции опоры $\vec{N}$ и направленная горизонтально сила трения $\vec{F}_{тр}$. Предполагая, что в течение всего соударения скорость бруска относительно диска меньше линейной скорости $v_A = \omega x = 2\pi\nu x$ точки A диска, получим, что все время $F_{тр} = \mu N$. Тогда импульс, переданный диском бруску в горизонтальном направлении, связан с импульсом, переданным бруску в вертикальном направлении, соотношением

$$P_г = \mu P_в.$$

С другой стороны,

$$P_г = mv,$$

где m — масса бруска, v — его горизонтальная скорость после соударения,

$$P_в = 2mv_0,$$

где $v_0 = \sqrt{2gh}$ — вертикальная скорость бруска непосредственно перед соударением. Отсюда находим

$$v = 2\mu v_0 = 2\mu\sqrt{2gh}.$$

За промежуток времени $\tau = 2t_{пад} = 2\sqrt{2h/g}$ между первым и вторым соударениями брусок пролетит по горизонтали расстояние

$$l = v\tau = 8\mu h.$$

По условию задачи должно выполняться соотношение

$$l > \sqrt{r^2 - x^2},$$

т. е.

$$x > \sqrt{r^2 - l^2} = \sqrt{r^2 - (8\mu h)^2} = 6 \text{ см}.$$

Проверим, будет ли при этом выполняться условие $v < v_A$:

$$v = 2\mu\sqrt{2gh} \approx 28 \text{ см/с},$$
$$v_A = 2\pi\nu x \approx 38 \text{ см/с} > v.$$

Итак, брусок должен первый раз упасть на диск на расстоянии не меньшем 6 см от его центра.

Л. А. Закревский

Задачник „Кванта"

Ф1106. *Несколько слов о сверхпроводниках. Сверхпроводники обладают свойством выталкивать магнитное поле (так называемый эффект Мейснера), благодаря чему они могут парить над магнитом. Эту особенность сверхпроводников предполагается использовать для создания сверхскоростных поездов на «магнитной подвеске», опытные образцы которых уже испытываются. А теперь сама задача. На сверхпроводящий образец массой m, парящий над постоянным магнитом, кладут груз точно такой же массы. Во сколько раз необходимо увеличить магнитную индукцию поля, создаваемого магнитом, чтобы сверхпроводник с грузом парил на прежнем расстоянии от магнита?*

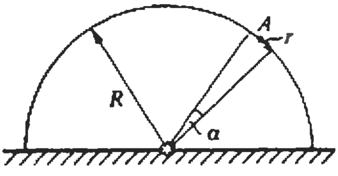
Магнитное поле, созданное постоянным магнитом, не проникает в сверхпроводящий образец. Это происходит потому, что в поверхностном слое сверхпроводника индуцируется ток, который создает свое собственное поле, компенсирующее внешнее. Таким образом, величина этого тока I должна быть пропорциональной величине магнитной индукции B внешнего поля: $I \sim B$. Согласно закону Ампера, взаимодействие электрического тока с магнитным полем характеризуется силой F, пропорциональной и току I, и магнитной индукции B. В нашем случае

$$F \sim IB \sim B^2.$$

Эта сила и уравновешивает силу тяжести сверхпроводящего образца. Если масса образца с грузом удвоилась, для сохранения равновесия магнитная индукция поля постоянного магнита должна быть увеличена в $\sqrt{2}$ раз.

А. И. Буздин

Ф1107. *Свежевыпавший пушистый снег искрится на солнце. Оцените характерное расстояние между отдельными «искринками».*



Будем считать, что снежинки в снежном покрове представляют собой случайным образом ориентированные плоские зеркала одинаковой площадью порядка 10 мм^2.

Каждая снежинка-зеркальце отражает свет в виде расходящегося пучка. Угол расходимости равен угловому размеру Солнца $\alpha \approx 0{,}5°$. Вероятность q того, что отраженный свет от случайно ориентированной снежинки попадает в данную точку A (см. рисунок), равна отношению площади основания конуса светового пучка к площади полусферы, проходящей через точку A (центр полусферы находится на снежинке). Учитывая, что высота светового конуса практически равна радиусу полусферы, находим

$$q = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{\pi R^2\,\mathrm{tg}^2\alpha/2}{\pi R^2} = \mathrm{tg}^2\alpha/2 \approx \frac{\alpha^2}{4},$$

где R — радиус полусферы, или расстояние от снежинки до наблюдателя, r — радиус основания светового пучка.

На одном квадратном метре поверхности снежного покрова расположатся $n \approx 10^5$ снежинок, при этом свет от qn частиц будет попадать в точку A.

Чтобы оценить характерное расстояние между отдельными «искринками», будем считать, что светящиеся снежинки расположены на поверхности равномерно, например находятся в центрах плотноупакованных шестиугольников. Тогда площадь одного шести-

Задачник „Кванта"

угольника S_0 и характерное расстояние между искринками d связаны соотношением

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} d^2,$$

откуда находим

$$d \approx 60 \text{ см}.$$

При практическом наблюдении снежинок нужно учитывать бинокулярность человеческого зрения. При малых расстояниях наблюдения ($R < 3$ м) число отдельных искринок удваивается: диаметр светового пучка меньше расстояния между зрачками, и каждый глаз видит «свои» искринки. При большом расстоянии ($R > 30$ м) диаметр светового пучка от отдельной снежинки становится на порядок больше, чем расстояние между зрачками, и можно использовать модель «точечного наблюдателя», как сделано выше.

Заметим, что искристый снег можно наблюдать не только днем, но и ночью, например в свете фонарей уличного освещения. Вспомните А. А. Фета:

Скрип шагов вдоль улиц белых.
Огоньки вдали.
На стенах оледенелых
Блещут хрустали.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Информация

Заказы принимаются...

(Начало см. на с. 22)

Цель книги — познакомить читателя-неспециалиста с основными фактами квантовой физики и историей их открытия.

95. Тарбеев Ю. В. Физические величины. Единицы. Эталоны. Константы. 1 р. 10 к.

В краткой и доступной форме представлены основные метрологические понятия, наименования и принятые в практике обозначения физических величин, наиболее точные и надежные значения физических констант, единицы физических величин.

96. Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и самообразования. 1 р. 90 к.

Руководство содержит сведения по всем разделам физики, которые изучаются в средней школе и средних специальных учебных заведениях.

108. Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. Физика в примерах и задачах. 1 р.

Цель авторов — научить читателя рассуждать, довести его до глубокого понимания сути рассматриваемых явлений. В новом издании нашли отражение последние изменения содержания курса физики средней школы и программ конкурсных экзаменов в вузы.

109. Гурский И. П. Элементарная физика с примерами решения задач. 1 р. 10 к.

Последовательно и кратко рассмотрен весь элементарный курс физики. Цель автора — помочь абитуриентам повторить курс физики с минимальной затратой времени.

110. Мелединн Г. В. Физика в задачах: Экзаменационные задачи с решениями. 70 к.

Содержит свыше 500 задач, предлагавшихся на письменном вступительном экзамене по физике в Новосибирском государственном университете.


В ЧЁМ ФОКУС?
Я МОГУ УГАДАТЬ ВОЗРАСТ И РАЗМЕР ОБУВИ КАЖДОГО ИЗ ВАС. КТО ЖЕЛАЕТ?
УМНОЖЬ СВОЙ РАЗМЕР ОБУВИ НА 5.
34 × 5 = 170
ТЕПЕРЬ ПРИБАВЬ 13 И УМНОЖЬ РЕЗУЛЬТАТ НА 20
170 + 13 = 183
183 × 20 = 3660
ГОТОВО!
ОТНИМИ ГОД СВОЕГО РОЖДЕНИЯ.
3660 − 1977 = 1683
ТЕПЕРЬ ПРИБАВЬ 1728. СКОЛЬКО ПОЛУЧИЛОСЬ?
3411!
У ТЕБЯ 34 РАЗМЕР ОБУВИ. ТЕБЕ В ЭТОМ ГОДУ ИСПОЛНИЛОСЬ ИЛИ ИСПОЛНИТСЯ 11 ЛЕТ.
В ЧЁМ СЕКРЕТ ФОКУСА? КАКОЕ ЧИСЛО СЛЕДУЕТ ПОСЛЕДНИМ ПРИБАВЛЯТЬ В 1989 году? А В 1995?

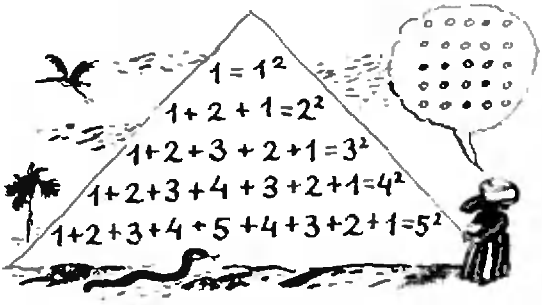
„Квант" для младших школьников.

Задачи

1. Проверьте справедливость тождеств в числовой пирамиде, изображенной на рисунке, и попробуйте доказать общее утверждение:

$$1+2+\ldots+(k-1)+k+(k-1)+ +\ldots+2+1=k^2.$$

Подсказка рядом с пирамидой.



2. Четыре подруги пришли на каток, каждая со своим братом. Они разбились на пары и начали кататься. Оказалось, что в каждой паре «кавалер» выше «дамы» и никто не катается со своей сестрой. Самый высокий из компании — Юра Воробьев, следующий по росту — Андрей Егоров, потом Люся Егорова, Сережа Петров, Оля Петрова, Дима Крымов, Инна Крымова и Аня Воробьева.

Кто с кем катался?

3. В большую кастрюлю, наполненную горячей водой, опустили стакан вверх дном. Через некоторое время из стакана стали выходить пузырьки воздуха. Почему?

4. Покажите, что уравнение

$$x^5y=xy^5+1987$$

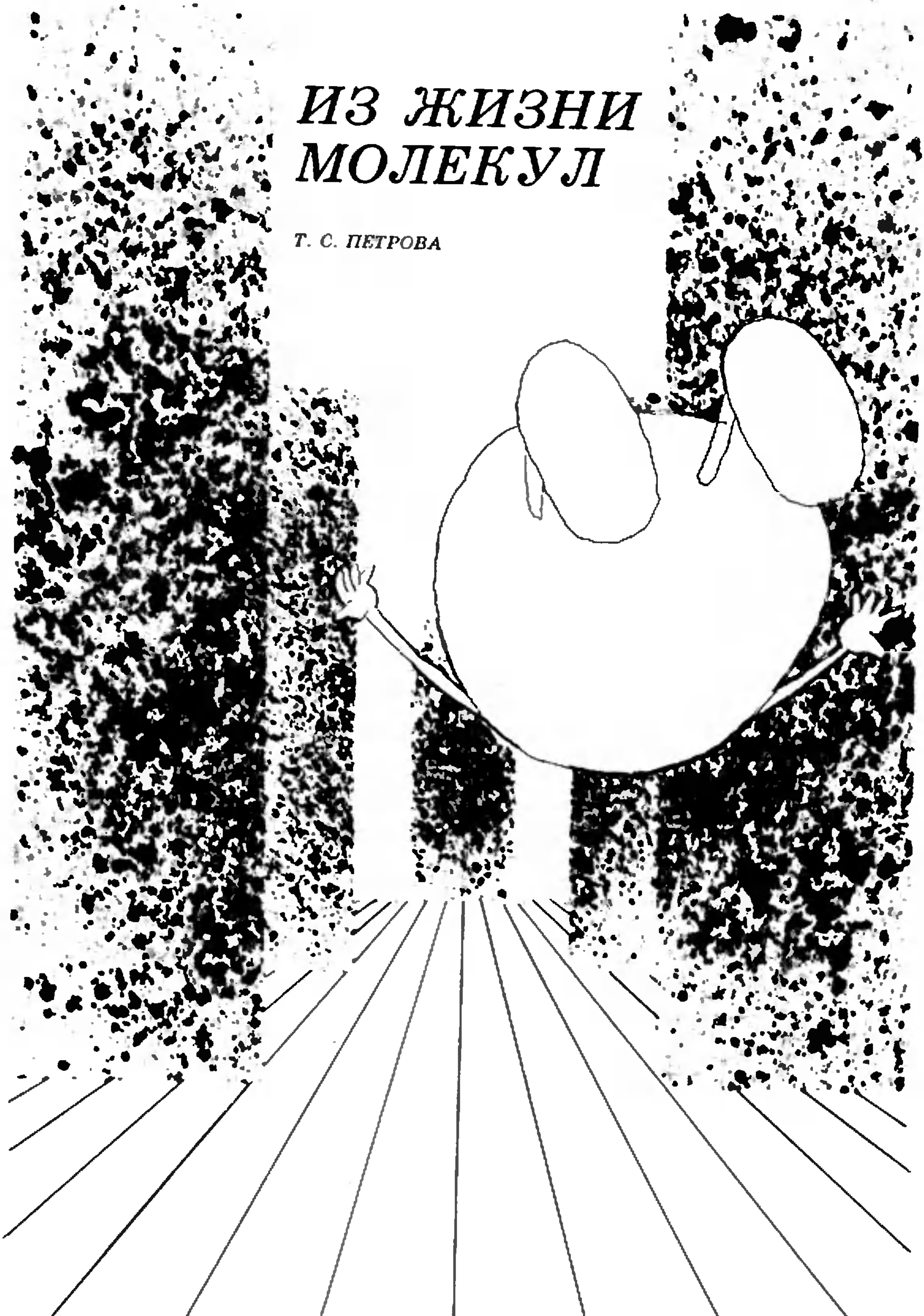
не имеет решений в целых числах.

5. Прямоугольный лист бумаги разрезали на три треугольных куска. Площадь одного из них оказалась равной полусумме площадей двух других кусков. Как относятся площади полученных кусков?

Эти задачи нам предложили *Н. И. Авилов, М. Б. Улановский, А. Г. Самосват, А. П. Тонких, В. В. Произволов.*

ИЗ ЖИЗНИ МОЛЕКУЛ

Т. С. ПЕТРОВА



Слово «молекула» появилось почти 350 лет назад. Появилось оно в книге французского философа Пьера Гассенди, изданной в 1647 году. По Гассенди молекула («массочка», от латинского «молес» — масса) — это несколько атомов, объединенных в одну группу. По-разному объединенные атомы, т. е. разные молекулы,— это «кирпичики», из которых природа строит разнообразные тела. Через сто лет М. В. Ломоносов, развивая учение о строении вещества, писал, что молекулы могут быть однородными (из одинаковых атомов) и разнородными (из разных), что молекулы взаимодействуют друг с другом и находятся в постоянном хаотическом движении.

Эти положения легли в основу молекулярно-кинетической теории строения вещества. Со временем они были подтверждены многочисленными опытами. О некоторых из них мы и хотим рассказать.

В 1911 году французский физик Дюнуайе поставил эксперимент, который показал, что в своем движении молекулы газа беспрестанно сталкиваются друг с другом, а между столкновениями их движение прямолинейно.

Схема опыта приведена на рисунке 1. Из стеклянной трубки откачан

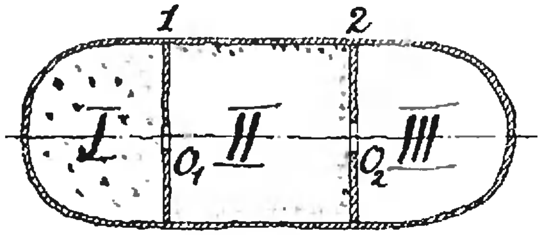


Рис. 1.

воздух. Трубка разделена двумя перегородками (*1* и *2*) на три отделения. В перегородках имеются отверстия (O_1 и O_2), расположенные на оси трубки. В отделении I помещен кусочек металлического натрия. Эту часть трубки нагревают. Натрий начинает испаряться, пары натрия заполняют отделение I и через отверстия O_1 и O_2 проникают в отделения II и III. На стенках трубки там образуется натриевый налет, при этом в отделении II он покрывает все стенки, кроме перегородки *1*, а в отделении III — только небольшую область напротив отверстия O_2.

Результаты этого эксперимента объясняются достаточно очевидно. В отделение II через отверстие O_1 попадают молекулы, скорости которых имеют различные направления. Поскольку воздух из трубки откачан, молекулы натрия в отделении II движутся практически без соударений и, попав на холодные стенки, оседают на них. А в отделение III попадают лишь те молекулы, скорость которых при вылете из отделения I была направлена вдоль прямой O_1O_2, и эти молекулы оседают в отделении III на стенке трубки строго напротив отверстий O_1 и O_2.

Факт, что молекулы движутся хаотически, казалось бы, свидетельствует о том, что скорости молекул могут быть самыми различными и нельзя указать ни их преимущественного направления, ни определенной величины. Однако в 1860 году английский физик Максвелл теоретически показал, что существует точный закон, которому подчиняются скорости беспорядочного, теплового движения молекул. Согласно этому закону — его называют законом распределения молекул по скоростям (или просто распределением Максвелла), при данной температуре существует определенное значение скорости, характеризующее движение большинства молекул данного газообразного вещества. И лишь у небольшой доли молекул скорости намного больше или намного меньше этой наиболее вероятной скорости. (При этом предполагается, что все молекулы газа совершенно одинаковы и температура постоянна по всему объему.) Закон распределения молекул по скоростям позволяет определить долю молекул, скорость которых лежит вблизи данного значения. Чем ближе это значение к наиболее вероятной скорости, тем больше доля молекул, движущихся с данной скоростью.

На рисунке 2 приведен график, иллюстрирующий распределение

Максвелла. По оси абсцисс отложена скорость v, а по оси ординат — функция $f(v)$, значение которой при данном значении скорости определяет долю молекул газа, скорость которых очень близка к v.

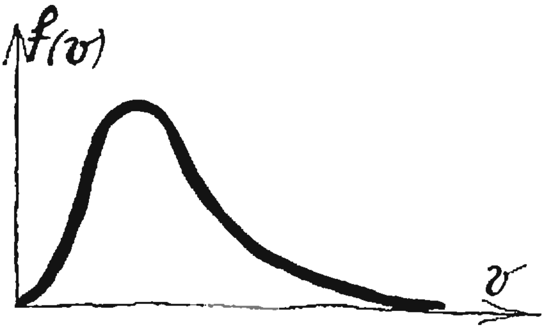


Рис. 2.

Хотя смысл сказанного понятен, надо иметь в виду, что интересоваться точным значением скорости определенной молекулы или тем, сколько молекул имеют конкретную скорость, бессмысленно. Дело в том, что рассматривая, скажем, газ в сосуде, мы имеем дело с огромным числом объектов (ведь в одном кубическом сантиметре воздуха в комнате находится примерно $2{,}5 \cdot 10^{19}$ молекул). И нет никакой возможности (да и нет необходимости) обсуждать характеристики каждого объекта — молекулы — в отдельности. В целом ряде случаев для описания поведения такого огромного числа частиц достаточно знания средних значений величин, характеризующих движение частиц,— скажем средней скорости или средней энергии.

Эксперимент по определению скорости движения молекул газа был впервые поставлен тоже только в начале XX века немецким физиком Штерном. Схема опыта представлена на рисунке 3. При нагревании тонкой посеребренной платиновой проволочки *1* (проволочка накаливается при прохождении по ней электрического тока) молекулы серебра испаряются с ее поверхности. Часть молекул через узкую щель *2* в тонком цилиндре *3*, окружающем проволочку, попадает внутрь большого цилиндра *4*, окружающего проволочку и маленький цилиндр. Из полости большого цилиндра воздух откачан, поэтому молекулы серебра движутся там практически без соударений и, попадая на стенку цилиндра, оседают на ней (температура поверхности большого цилиндра достаточно низкая). Оседающие молекулы образуют узкую полоску налета *5*. Если вся система покоится, то эта полоска образуется как раз напротив щели *2*, создавая как бы ее изображение. Но если оба цилиндра (*3* и *4*) вращаются вокруг общей оси, проходящей через проволочку *1*, то полоска налета уже не будет образовываться напротив щели *2*. Действительно, за то время, пока молекулы пролетают расстояние от щели до поверхности цилиндра *4*, цилиндр успевает повернуться, и след *6* (рис. 4), оставляемый молекулами, оказывается смещенным относительно полоски *5* в направлении, противоположном направлению вращения цилиндров.

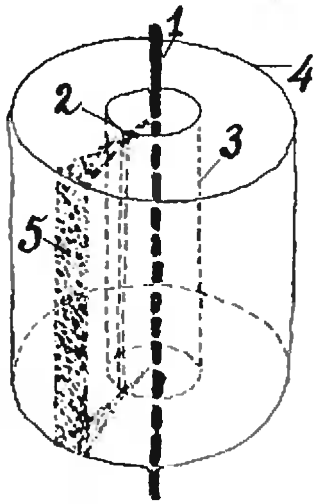


Рис. 3.

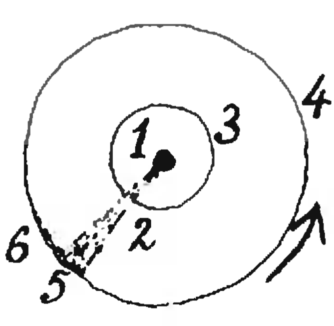


Рис. 4.

Зная скорость, с которой вращаются цилиндры *3* и *4*, можно по расстоянию между следами *5* и *6* определить время, за которое молекулы пролетают расстояние от щели *2* до поверхности цилиндра *4*. А зная это расстояние, можно определить скорость молекул.

Важно отметить, что полоска налета, образованного молекулами, оказалась не постоянной толщины. Вблизи середины полоска наиболее толстая, а на краях ее толщина уменьшается (рис. 5). Поскольку толщина серебряного слоя определяется количеством молекул, осевших на поверхности цилиндра, то по ней можно судить о количестве молекул, налетающих на стенку с той или иной скоростью. Ведь ближе к следу *5* попадают наиболее быстрые молекулы, а дальше от него оседают более медленные. (Неправда ли, «профиль» серебряного налета похож на кривую распределения Максвелла?)

Рис. 5.

Первый опыт по определению скорости молекул Штерн поставил в 1920 году, а спустя четверть века идея опыта была использована для экспериментальной проверки закона Максвелла. В этих экспериментах измерялось число молекул, скорости которых лежат в некотором интервале скоростей. Измерения полностью подтвердили максвелловский закон распределения.

Возможно, у читателя возник вопрос: неужели столкновения молекул друг с другом никак не влияют на распределение? В опыте Штерна горячие молекулы летели, не сталкиваясь друг с другом, а может быть, если бы молекулы попадали не на холодную стенку, к которой они прилипали, а на такую же горячую, как они сами, и отскакивали от нее, то со временем в результате столкновений друг с другом они выровняли бы свои скорости?

Разумеется, столкновения сказываются на скоростях молекул. Но изменение скоростей происходит таким образом, что в любой промежуток времени число молекул, скорость которых уменьшается, равно числу молекул, скорость которых увеличивается, и распределение молекул по скоростям остается неизменным — таким, как на рисунке 2. Если, конечно, температура газа постоянна.

А если газ нагревать? Более высоким температурам соответствуют бо́льшие скорости молекул. Если во всем объеме, занимаемом газом, устанавливается более высокая температура, то кривая распределения смещается в сторону бо́льших скоростей. При этом, как нетрудно понять, площадь под кривой остается постоянной — ведь она соответствует полному числу молекул в объеме.

И в заключение предлагаем вам подумать: какие явления в жизни, в окружающей природе свидетельствуют о том, что молекулы движутся хаотично, что между столкновениями их движение прямолинейно и что скорости молекул при одной и той же температуре не одинаковы.

ОСТРОВ ПЯТИ КРАСОК

(фантастический рассказ)

М. ГАРДНЕР

Перепечатывается с сокращением из сборника «Трудная задача» (М., Мир, 1982). Перевод Ю. Данилова.

В Монровии, столице Либерии, есть только один магазин хозяйственных товаров. Когда я сказал темнокожему клерку, сколько галлонов краски мне нужно, он от удивления присвистнул:

— Не иначе, как вы собрались выкрасить гору, мистер!

— Нет,— заверил я его,— не гору, всего лишь остров.

Клерк улыбнулся. Он думал, что я шучу, но я действительно собирался выкрасить целый остров в пять цветов: красный, синий, зеленый, желтый и фиолетовый.

Для чего мне это понадобилось? Чтобы ответить на этот вопрос, мне придется вернуться на несколько лет назад.

Дело в том, что темой моей докторской диссертации была проблема четырех красок. Гипотеза о четырех красках утверждает, что для правильной раскраски любой карты, при которой любые две соседние страны, имеющие общий отрезок границы, будут выкрашены в различные цвета (две страны не считаются соседними, если их границы имеют лишь одну общую точку), достаточно четырех красок. Страны на карте могут быть любых размеров и самых причудливых очертаний. Число их также может быть произвольным. Гипотеза четырех красок была впервые высказана в 1860 году Мебиусом, и, хотя над ее решением бились лучшие математические умы, гипотезу эту не удавалось ни доказать, ни опровергнуть*).

По странному стечению обстоятельств проблема четырех красок была решена для всех поверхностей, кроме сферы и плоскости. В 1890 году Р. Дж. Хивуд доказал, что для раскраски поверхности тора (поверхности бублика) необходимо и достаточно семи красок, а в 1934 году Ф. Франклин доказал, что шести красок достаточно для раскраски карт на односторонних поверхностях типа листа Мебиуса и бутылки Клейна.

17 ноября 1947 года профессор Венского университета Станислав Сляпенарский, читавший цикл лекций в Чикагском университете, сделал сенсационное сообщение о своем открытии нульсторонних поверхностей**).Это открытие имело далеко идущие последствия для изучения свойств бутылки Клейна и произвело подлинный переворот в исследованиях по проблеме четырех красок.

Развивая некоторые идеи Сляпенарского, я опубликовал в 1950 году свою известную работу с опровержением «доказательства» Хивуда, полагавшего, что для правильной раскраски карты на плоскости необходимо и достаточно пяти красок. По всеобщему же убеждению топологов, для правильной раскраски плоскости или сферы достаточно четырех красок.

Вскоре после выхода в свет моей работы по проблеме четырех красок мне довелось завтракать в университетском клубе «Четырехугольник» с профессором Альмой Буш. Альма — один из ведущих наших антропологов и, несомненно, самая красивая женщина во всем университете.

Альма только что вернулась из экспедиции на небольшой остров, расположенный в нескольких сотнях миль от побережья Либерии у западной кромки африканского материка. Она возглавляла группу студентов-антропологов, изучавших нравы и обычаи пяти племен, населявших остров.

— Остров разделен на пять областей,— сообщила мне Альма, вставляя сигарету в длинный мундштук из черной пластмассы.— Все они граничат друг с другом. Это важно для понимания тамошних нравов. Общность границ позволяет племенам поддерживать некое единство культур. Что с тобой, Марти? Почему у тебя такой изумленный вид?

Я застыл, и, не донеся вилку до рта, медленно положил ее на стол.

*) Рассказ Гарднера написан в 1952 году. Положительное решение проблемы четырех красок было найдено в 1976 году. (*Примеч. ред.*)

**) Подробный рассказ об этом читатель найдет в 6-м номере «Кванта» (*Примеч. ред.*)

— Потому, что ты рассказываешь невероятные вещи. Такого просто не может быть.

Альма была уязвлена:

— Чего не может быть?

— Пяти племен, имеющих общие границы. Это противоречит знаменитой проблеме четырех красок.

— Противоречит чему?

— Проблеме четырех красок,— повторил я.— Есть такая проблема в топологии. Хотя она никем не доказана и не опровергнута, никто не сомневается, что она верна.

Я принялся концом ложки чертить на скатерти, пытаясь объяснить Альме, в чем здесь дело.

Альма быстро схватила общую идею.

— Может быть, у островных племен другая математика? — высказала она предположение, щурясь от дыма сигареты.

Я покачал головой.

— Математика, дорогая моя, едина для всех культур. Дважды два всегда четыре, даже в Африке. Если твой остров действительно разделен так, как ты говоришь — на пять областей, каждая из которых имеет общую границу с четырьмя другими областями,— то я начну верить в математические способности твоих островитян. Нет ли у тебя карты острова?

Альма отрицательно покачала головой.

— Может быть, тебе отправиться с нами? — предложила она, стряхивая пепел.— Я пробуду на острове месяц. Мне нужно проверить кое-какие данные перед тем, как опубликовать их, а ты тем временем сделаешь карту острова. Если то, о чем я тебе рассказала, не подтвердится, я возмещу твои расходы.

Что я терял? Начинались летние каникулы, а это путешествие обещало быть приятным и необычным. И я согласился.

* * *

На второй день нашего пребывания на острове Альма познакомила меня с одним из островитян по имени Агуз. Агуз был из племени хийику, составлявшего интеллектуальную элиту острова. Альма договорилась с Агузом совершить втроем пеший поход по всему острову. К счастью, остров был невелик: площадь его не превышала 25 квадратных миль. Пустившись в путь с утра пораньше, мы могли к вечеру обойти весь остров. Я прихватил с собой блокнот и коробку карандашей, чтобы набросать хотя бы грубую карту пяти областей.

Свой первый визит мы нанесли племени хийику, на территории которого был расположен наш лагерь.

На верхнем листке своего блокнота я нарисовал круг и закрасил его синим. Точная конфигурация территории, занимаемой хийику, была неизвестна, но для моих целей было вполне достаточно и этого грубого приближения. Когда мы, двигаясь на запад, оказались на территории, занимаемой племенем вольфези, я слева от синего кружка поставил загогулину и закрасил ее в зеленый цвет.

С трудом продираясь сквозь заросли какого-то кустарника, мы вышли на берег узкой тихой речки. Огромный плот из бревен едва выступал из светлой жирной грязи, устилавшей дно реки. Агуз столкнул плот в воду, взобрался на него и принялся отталкиваться длинным бамбуковым шестом. Мы перешли вброд узкую полоску топкой грязи у берега и присоединились к нему. Лавируя шестом, Агуз направил плот вниз по течению извилистой реки.

Через некоторое время Агуз сообщил о том, что мы вступаем на территорию племени гезелломо. Она была расположена к северу от вольфези.

Я согнал со своего блокнота огромную стрекозу и нанес на свою карту-схему красное пятно, расположив его над зеленым.

Проплыв с полмили по территории гезелломо, Агуз причалил к берегу, и мы сошли на сушу. Небольшой подъем по склону сквозь заросли высокой травы — и мы на краю деревни гезелломо.

Благополучно миновав эту деревню, мы побрели на юго-восток. Пройдя около мили, Агуз указал на видневшиеся вдали пальмы, аккуратно посаженные рядком, и сообщил, что перед нами граница между гезелломо и хийику. Я достал свой блокнот и продолжил красное пятно до синего круга.

Вскоре после полудня мы добрались до поселения племени беболупу. Насколько я мог понять, территория беболупу, которую я закрасил фиолетовым цветом, простиралась на юг, а затем на запад и, обогнув южный конец территории, закрашенной мною синим, доходила до зеленой. Я протянул свою карту-схему Альме.

— Посмотри: синяя территория со всех сторон окружена территориями трех других цветов. Пятая территория не может иметь с ней общую границу.

Альма показала карту Агузу, и какое-то время они о чем-то говорили между собой.

— Агуз говорит, что не знает, как выглядит их остров с неба, но ты, по его словам, где-то допустил ошибку.

Я взглянул на Агуза. На лице его не дрогнул ни один мускул, но меня не покидало неприятное чувство, что в глубине души он считает меня идиотом.

Последнюю территорию, которую мы посетили, населяло племя, решительно не поддающееся никакому описанию. По сути дела их отличительной особенностью и было то, что они не поддавались описанию. У пятого племени не было вождя, оно не ведало разделения труда, родственных уз, не было сложившихся ритуалов по случаю рождения, вступления в брак или смерти. У племени не было религиозных воззрений и полностью отсутствовали традиции и обычаи. Более того, у племени не было даже своего названия.

Пятую территорию я закрасил желтым цветом. Мы прошли участки, граничившие с зеленой, красной и фиолетовой областями. Когда Агуз, наконец, указал на противоположный берег ручейка и сообщил, что там начинается территория хийику (синяя территория), я ощутил, как у меня по спине забегали мурашки.

— Не может быть! — воскликнул я.— Иначе мы где-то должны были бы пересечь чью-то территорию!

Альма перевела мои слова Агузу. Он упрямо затряс головой.

Разумеется, я был убежден, что где-то мы допустили какую-то ошибку. Территория одного из племен могла состоять из двух несвязных кусков. Агуз мог неправильно указать границы между племенами. Какая-то ошибка непременно должна была быть! Когда мы вернулись в наш лагерь, между мной и Альмой вспыхнул спор. Альма утверждала, что я проиграл и, следовательно, должен сам платить за поездку.

Я промакнул носовым платком свою лысину. Если бы раздобыть точную карту с очертаниями пяти областей! Можно было бы, конечно, произвести топографическую съемку, но для этого требовались приборы, которых у нас не было. Внезапно мне пришла в голову потрясающая идея.

— Как ты думаешь,— спросил я у Альмы,— можно было бы в Монровии взять напрокат какой-нибудь распылитель?

Альма прищурилась от дыма сигареты и сказала, что, по ее мнению, это вполне возможно.

— Если бы нам удалось раздобыть распылитель,— продолжал я,— мы могли бы пометить каждую территорию пятнами соответствующего цвета, и на цветном аэрофотоснимке форма каждой территории была бы великолепно видна.

Альма заявила, что мой план великолепен. Ей в любом случае нужно было снять карту острова, а предложенный мною метод позволяет выполнить эту задачу быстрее, чем другие.

— Краска за мой счет,— щедро предложила она.

Тут мы и подошли к тому самому месту, с которого я начал свой рассказ. У подрядчика, принимавшего заказы на выполнение строительных работ, мы взяли напрокат дюжину распылителей краски. Я купил двадцать тысяч галлонов самой дешевой краски. Вернувшись на остров, мы без труда набрали бригаду мальчишек племени хийику и обучили их пользоваться распылителями.

Агуз был назначен бригадиром. Территорию каждого племени мы метили краской того же цвета, что и на моей «карте». Закрашивание всей территории потребовало бы слишком больших затрат, поэтому мы решили распылять краску пятнами диаметром около десяти футов с интервалами в сто футов. С самолета территория каждого племени казалась бы раскрашенной в горошек, и границы были бы легко различимы.

Каждый раз я сопровождал бригаду, чтобы проследить за работой. Все было сделано, как надо. В том, что четыре территории имели общие границы, сомнений не было: у каждой из них к какому-нибудь участку границы примыкала территория другого цвета.

Решающим должен был быть пятый цвет!

К распылению желтой краски мы приступили на двенадцатый день работы. Желтая территория уже граничила с красной, зеленой и фиолетовой. Мы приближались к синей территории. Нервы мои были напряжены до предела.

Бригада маляров медленно продвигалась сквозь подлесок. Заходившее солнце отбрасывало длинные тени. Попугай с красивым ярким оперением, получив свою порцию краски из распылителя, с шумом взлетел и скрылся, издавая пронзительные крики. Небольшая коричневая змея, обрызганная желтой краской, шипя уползла в укромное местечко. Неожиданно я схватил Альму за плечо.

— Клянусь тенью Мебиуса! — воскликнул я хрипло, не в силах унять бешено колотившееся сердце.— Я вижу отсюда синие пятна!

В прекрасных серых глазах Альмы вспыхнуло торжество.

— Так кто был прав?

Я уселся на большой пень и вытер пот, градом катившийся по лицу. Голова раскалывалась от нестерпимой боли. В висках стучало. Сквозь монотонный неумолчный гул насекомых издали доносился четкий, зажигательный ритм барабанов беболупу. Агуз стоял в ожидании дальнейших приказаний.

Я был в полной растерянности. Строго говоря, пять областей никак не могли иметь общие границы. Я знал, что проблему четырех красок удалось доказать для случая, когда число стран не превышает 35. Но что, если в эти доказательства вкралась какая-нибудь ошибка? Если остров действительно опровергает утверждение проблемы четырех красок, мое открытие станет одним из величайших поворотных пунктов в топологии!

Через несколько дней, когда очередным рейсом прилетел самолет из Монровии, мы решили произвести аэрофотосъемку острова. К сожалению, самолетик был маленьким, с двумя открытыми кабинами, поэтому лететь мог только фотограф с камерой. Как только снимки будут сделаны, пилот высадит фотографа, и возьмет меня, чтобы я мог с воздуха посмотреть на раскрашенный остров.

Я нервно наблюдал за тем, как самолет, медленно описав круг над островом, пошел на снижение. Пробежав немного, самолет остановился, и фотограф спрыгнул на землю. Я поспешно подбежал, намереваясь занять место в кабине, но пилот, грубоватый на вид африканец, великолепно говоривший по-английски, покачал головой.

— Съемки заняли больше времени, чем я рассчитывал,— сказал он твердо.— Мне необходимо через полчаса вернуться в Монровию. Жаль, но ничего не поделаешь. Вернусь через неделю. Тогда и покатаю вас.

Напрасны были мои мольбы и просьбы. Когда самолет взлетел, я обернулся к фотографу.

— На что похож остров сверху?

Фотограф нахмурился.

— Не могу вам сказать. Цвета переплелись весьма причудливо. Я пытался набросать эскиз, но задача оказалась слишком сложной, и ее пришлось оставить.

Я спросил, не состояла ли какая-нибудь область из нескольких отдельных частей, полностью окруженных другим цветом. Фотограф отрицательно покачал головой.

— Все территории были из одного куска. И все доходили до побережья.

— Гм, интересно,— пробормотал я. И тут мне в голову пришла мысль, окончательно доконавшая меня. Я стукнул себя по лбу и застонал.

Альма, думая, что мне плохо, плеснула мне в лицо холодной воды. Я сел на землю и схватился за голову обеими руками, пытаясь хоть как-то унять пульсирующую боль.

Вы спросите, что случилось? Внезапно я понял, что если территория каждого племени имеет выход к морю, то море граничит с территориями всех пяти племен. Море было шестым цветом!

Проявить цветную пленку в лагере или в Монровии было невозможно. Не оставалось ничего другого, как ждать, пока мы вернемся домой.

Через три дня хлынул тропический ливень. Он шел, не переставая, до конца недели. Когда пилот прилетел на остров очередным рейсом, он сообщил, что всю краску смыло.

Нетерпение, с которым я ожидал увидеть снимки, достигло таких размеров, что я не мог дождаться, когда Альма завершит работу на острове. Обратным рейсом я улетел в Монровию, а оттуда на теплоходе вернулся в Штаты.

* * *

В Нью-Йорке я отдал проявить снимки в фотолабораторию, и когда зашел получить их через несколько дней, глаза мои были красны от бессонницы.

— Боюсь, что ваш фотограф выбрал не тот светофильтр,— сказал лаборант, показывая мне пленку на просвет.

На всех снимках остров получился сплошным темно-красным пятном! Я взял снимки и побрел вдоль улицы, бессознательно бормоча себе под нос.

Мои академические обязанности не позволяли мне вернуться на остров раньше следующей осени. Вернувшись к себе в Чикаго, я попытался рассказать коллегам об острове с пятью племенами, но, слушая меня, они только печально качали головами и вежливо улыбались. Некий профессор из Висконсина, сообщили мне коллеги, сумел доказать гипотезу четырех красок для случая, когда число стран не превышает 83. Декан предложил мне месячный отпуск.

— Вы очень устали, вам нужно отдохнуть,— были его слова.

К концу лета я снова набрал свой обычный вес. Настроение мое начало улучшаться. Я тщательно изучил расписание авиарейсов на Монровию: во мне созрело решение вернуться на остров и выкрасить его еще раз.

* * *

На остров я попал только в конце сентября, через несколько месяцев после того, как Альма и ее студенты покинули его.

Отыскать территорию хийику оказалось довольно трудно. Наконец, я объяснил одному из хийику, что хочу видеть Агуза. Тот привел меня к большой хижине на окраине деревни. За хижиной возвышалось какое-то странное сооружение, блестевшее в ярких лучах света. По виду оно было сделано из полированных стальных пластин, скрепленных болтами.

Агуз вышел навстречу мне из хижины. Вслед за ним в дверном проеме показался белый человек плотного сложения, в котором я узнал... Ноги мои стали ватными! Не может быть! Как же так? Ведь он давно... Но это был он — профессор Станислав Сляпенарский собственной персоной!

Агуз ухмыльнулся и поспешил поддержать меня. Профессор принялся обмахивать меня своим шлемом. Он выглядел лучше, чем когда-либо. Борода осталась такой же рыжей. Лицо и лысую голову покрывал густой загар. Сляпенарский и Агуз ввели меня в хижину, и мы уселись в удобные кресла.

Не буду рассказывать во всех подробностях удивительную историю появления профессора на острове. Скажу лишь, что, после того как сенсационная весть о его открытии нульсторонних поверхностей облетела весь мир, Сляпенарский потерял покой из-за обрушившийся на него известности. Чтобы избавиться от назойливых репортеров, Сляпенарский решил скрыться. Он разослал телеграммы с сообщением о своей мнимой смерти и по подложному паспорту прибыл в Монровию.

Обследовав несколько островов, Сляпенарский, наконец, нашел, что искал. Без особого труда овладев диалектом хийику, профессор сделал Агуза, обладавшего, как оказалось, незаурядными математическими способностями, своим главным ассистентом. К тому времени между племенами возникли территориальные споры. Для ликвидации разногласий необходимо было установить демаркационные линии.

— Гипотезу четырех красок мне удалось опровергнуть еще до того, как я решил скрыться,— продолжал свой рассказ профессор.— Разделить остров на пять граничащих друг с другом областей означало установить мир. С помощью Агуза я разметил границы, и вскоре воцарился мир. Вы как раз поспели к концу нашей работы.

— Так вы знали о моем предыдущем визите на остров вместе с доктором Буш? — спросил я.

— Разумеется; но я не мог допустить, чтобы вы вернулись в Штаты с решением проблемы четырех красок. На остров хлынули бы фоторепортеры и операторы кинохроники!

— Так это вы,— спросил я с горечью,— испортили мои пленки?

— Боюсь, что я, старина. Я попросил Агуза подменить светофильтры, а вот к ливню, должен признаться, я не имею ни малейшего отношения. А вскоре после вашего отъезда я изменил границы территорий.

— Но как они проходили, эти границы? — спросил я, сгорая от любопытства.

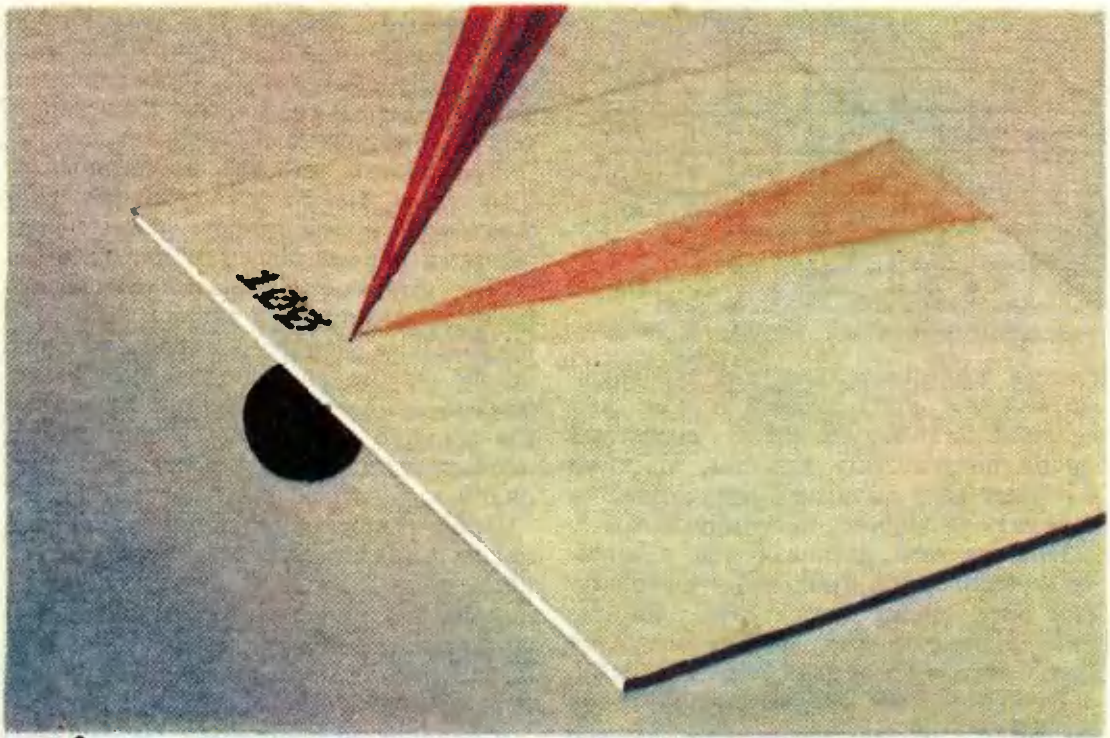
Крохотные глазки Сляпенарского блеснули.

— Пойдемте, я покажу вам свою лабораторию,— сказал он, вставая.

Профессор вывел меня на площадку позади хижины. Он показал на стальную конструкцию, которую я видел, когда подходил к хижине.

— Перед вами плод моих трудов за два года,— сказал Сляпенарский.— Подлинная бутылка Клейна.

(Окончание см. на с. 60)



Искусство программирования

Сколько цифр в числе 100!?

В. Н. КАСАТКИН

Кажется, на этот вопрос получить ответ легко. В самом деле, ниже приводится программа — вычисление факториала числа N; работая по такой программе, компьютер вычислит и выведет на экран или напечатает число 100!. Нам останется только подсчитать число цифр в выведенном машиной числе.

Но попытки применить этот подход к большим числам N приводят к неудачам — дело в том, что персональные компьютеры в *большинстве своем* не могут вывести на экран число, содержащее более 15 цифр.

Вот факториалы нескольких чисел, больших 10, вычисленные на ЭВМ типа «Корвет»:

10!=3628800;
11!=39916800;
12!=479001600;
13!=6227020800;
14!=87178291200;
15!=1307674368000;
16!=20922789888000;
3.55687428096E+14=17!

Факториал числа 17 уже не поместился на экране — произошло переполнение разрядной сетки и компьютер вместо точного результата 355687428096000 выдал значение числа 17! в нормализованной форме. ЭВМ предложила нам считать, что

$$17! = 3.55687428096E+14 = 3{,}55687428096 \cdot 10^{14}.$$

Означает ли это, что мы в принципе не можем на компьютере получить факториал большого числа, например 100!. Ответ простой: нет, не означает. Мы можем с помощью ЭВМ получить полную запись числа 100!, не потеряв ни одной цифры.

Это достигается путем использования программистской смекалки. Задача, которую мы собираемся решить,

a_n	...	a_4	a_3	a_2	a_1	
0		0	0	0	0	
0		0	0	0	1	$1!$
0		0	0	0	2	$2!$
0		0	0	0	6	$3!=6$
0		0	0	2	4	$4!=24$
0		0	1	2	0	$5!=120$

Рис. 1.

весьма примечательна для программирования. Речь пойдет о том, как человек использует ЭВМ: действует ли он по шаблону или же, вникнув в особенности машины, заставляет ее работать необычно, нестандартно.

Прежде чем рассказать о практически пригодной программе нахождения всех цифр числа 100!, напомним о нескольких необходимых в дальнейшем средствах языка Бейсик.

В программе будет использована функция «целая часть от значения аргумента». В Бейсике эта функция обозначается INT(X) — для любого действительного X значение функции INT (X) равно целому значению X, не превышающему его, например:

INT(2.5)=2, INT(0.002)=0,
INT(—6.3)=—7.

Условимся все цифры получаемых факториалов чисел считать значениями переменных a_i, где $i=1, 2, \ldots$ До начала вычисления $N!$ каждая переменная a_i равна нулю; начнем вычисления (рис. 1).

В процессе вычислений значения переменных a_i изменяются.

Напомним, что если известен факториал числа $(k-1)$, то легко найти факториал числа k:

$$k!=k\cdot(k-1)!.$$

Применим это правило к получению 4!, если известно, что 3!=6. Действуем так: 6 умножаем на 4 и получаем 24. Цифру 4 делаем значением переменной a_1, а цифру 2 — значением переменной a_2. Схематически все эти действия можно изобразить так, как показано на рисунке 2.

Продолжим работу: вычислим 5!. Для этого 4!=24 умножим на 5 и соответствующие цифры делаем значениями переменных (см. рисунок 3).

Присмотримся внимательнее к процессу перемножения чисел k и $(k-1)!$. Умножение одного многоразрядного числа на другое сводится к умножению и сложению цифр. При этом мы хорошо различаем цифру младшего разряда и цифры старших разрядов.

Приостановим обсуждение задачи в целом и научимся решать небольшую, но важную для дальнейшего задачу: научим вычислительную машину выполнять выделение цифры десятков и цифры единиц в двухразрядном десятичном числе.

Необходимо составить программу, работая по которой, ЭВМ, после предъявления ей двухразрядного числа, переменной a_1 присвоит значение, равное числу единиц, а переменной a_2 — значение, равное числу десятков.

Пусть переменная A имеет значение, равное двухразрядному десятичному числу (например 73). Разделим значение A на 10 и от результата возьмем целую часть — это и будет цифра десятков:

LETA(2)=INT(A/10),
т. е. $a_2=[7{,}3]=7$.

Если теперь от значения A отнять $a_2\cdot 10$, то получится цифра единиц в исходном числе A:

LETA(1)=A—A(2)*10,
т. е. $a_1=73-7\cdot 10=3$.

Вернемся к задаче получения числа 5! Мы помним, что для этого придется число 4!=24 умножить на 5. Помним мы и о том, что число

a_4	a_3	a_2	a_1	
0	0	0	6	$4\cdot(3!)=24$
0	0	2	4	

Рис. 2.

a_4	a_3	a_2	a_1	
0	0	2	4	$5\cdot(4!)=120$
0	1	2	0	

Рис. 3.

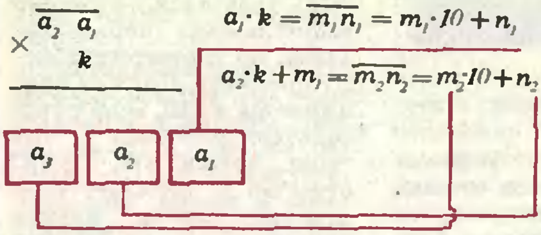


Рис. 4.

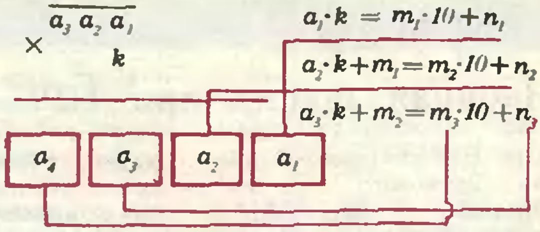


Рис. 5.

$4! = 24$ хранится необычно: цифра 4 есть значение переменной a_1, а цифра 2 — значение переменной a_2. Можно образно сказать, что цифры 2 и 4 хранятся в ячейках a_2 и a_1 соответственно.

Умножив содержимое ячейки a_1 на 5, мы получим двухразрядный результат: $4 \times 5 = 20$. Цифру младшего разряда (это в данном случае — ноль) будем считать новым значением переменной a_1, а цифру 2 удержим пока «в уме». После этого следует выполнить умножение цифры, хранящейся в a_2, на 5 и к полученному произведению прибавить цифру 2, предварительно взяв ее из нашей памяти. Результат действий: $5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$ (рис. 4). После выполнения всех действий переменные a_1, a_2 и a_3 получили новые значения $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ и $a_3 = 1$.

Если даже число $(k-1)!$ содержит не две, а три и более цифр, схема получения цифр числа $k!$ останется прежней (рис. 5).

Естественно, что число k может быть не только одноразрядным, а и двухразрядным. В этом случае коэффициенты m_i могут быть многоразрядными числами.

Используя высказанные идеи, можно предложить следующий текст программы:

```
1 REM ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАКТОРИАЛА ЧИСЛА N
5 DIM A(100)
10 INPUT N
15 FOR I=2 TO 100
20 A(I)=0:NEXT I
25 A(1)=1:L=1
30 FOR K=1 TO N
35 R2=0:R1=0:I=1
40 IF R2=0 THEN IF I>L THEN 80
45 R=A(I)*K+R2
55 R2=INT(R/(10000!))
60 R1=R-R2*(10000!)
65 A(I)=R1
70 I=I+1
75 GOTO 40
80 L=I-1
85 NEXT K
86 FOR J=1 TO I-1
87 PRINT A(I-J);
88 NEXT J
93 END
```

В результате применения программы получим*):

```
100!=93  326215  443944  152681  699238  856266  700490  715968  264381  6214
   963  895217  599993  229915  608941  463976  156518  286253  697920  8272
   251  185210  916864  0  0  0  0
```

Итак, у числа 100! имеется 158 цифр — поистине гигантское число!

---

*) *Машина, распечатывая число, записывает его группами по 6 цифр, пропуская при этом начальные нули. Так, в приведенной распечатке группу цифр 6214 нужно воспринимать как группу ∅∅6214, группу 963 — как ∅∅∅963, 8272 — как ∅∅8272, 251 — как ∅∅∅251 и каждый ∅ — как группу ∅∅∅∅∅∅.*

Информация

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. Ленинского комсомола работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 8—10 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказывать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 8—10 классов, на биологическое — только учащиеся 9 классов, на экономическое — только учащиеся 10 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школе под руководством учителя. Руководители кружков набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные материалы. Работы отдельных учащихся проверяют в ЗШ, а работы членов кружков — его руководители (по желанию

(Начало см. на с. 50)

Наверх вели две веревочные лестницы. Мы взобрались по ним и осторожно уселись на закругленный край. Из отверстия вырывался поток холодного воздуха.

— Как вам известно,— заметил Сляпенарский,— горлышко настоящей бутылки Клейна открывается в четвертое измерение.

Я осторожно наклонился вперед и заглянул внутрь бутылки — холодный ветер дунул мне в лицо. Из головы у меня никак не выходила гипотеза четырех красок. Я снова спросил об этом Сляпенарского.

— Что проблема четырех красок? — сказал он пренебрежительно.— Пустячок, сущая безделица. Дайте-ка мне карандаш и блокнот.

Я вынул блокнот из кармана и протянул Сляпенарскому. Он набросал несколько причудливых геометрических фигур.

— Если карта не содержит конфигураций, допускающих приведение к более простым формам, например не содержит нетройных вершин, многосвязанных областей или колец, состоящих из четного числа шестиугольников и пар смежных пятиугольников, то...

По сей день не могу без содрагания вспомнить о том, что затем произошло. Из темных глубин бутылки Клейна внезапно высунулся длинный черный крючок, который охватил Сляпенарского за талию. Тот не успел даже позвать на помощь, как был увлечен в туманные глубины бутылки Клейна.

Должно быть, я находился в шоковом состоянии.

— Сляпенарский! Где вы, Сляпенарский? — отчаянно взывал я, но тщетно. Ответом мне было лишь эхо, доносившееся, как из глубокого колодца.

Все остальное можно рассказать кратко. Молва о случившемся с быстротой молнии распространилась среди хийику. Ночью несколько хийику проникли на участок профессора, унесли бутылку Клейна и сбросили ее со скалы. Они считали, что в бутылке были злые духи, и хотели навсегда покончить с источником зла.

руководителя часть работ может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 8—9 классов ЗШ приглашается в Летнюю школу при НГУ, которая работает с 1 по 22 августа. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, посещают с экскурсиями университет и научно-исследовательские институты Академгородка, отдыхают и развлекаются. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой выслать первое задание. Необходимо указать также следующие данные о себе (см. образец):

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
класс, в котором вы учитесь в своей школе	8 «а»
отделение ЗШ, на котором вы желаете учиться (можно указать два)	математическое и физическое
индекс почтового отделения и подробный домашний адрес	632148 Новосибирская обл., с. Мозениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5, Николаеву Игорю Ивановичу

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или на физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября*.

Решения задач нужно записать в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работы вместе с заявлением отсылайте только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Наш адрес: 630090 Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по математике

8 класс

1. 80 % пути турист проехал на велосипеде, 40 % оставшегося пути прошел пешком и 12 км проплыл на плоту. Найдите весь путь туриста.

2. Нарисуйте график функции
$$y=|x-1|+|x+1|.$$

3. Докажите, что девятизначное число, все цифры которого одинаковы, делится на 37.

4. Высоты треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Какой это треугольник: остроугольный, прямоугольный или тупоугольный?

5. Найдите сумму всех трехзначных чисел, в записи которых все цифры — нечетные.

6. Как с помощью циркуля и линейки построить треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону? Сколько различных треугольников может получиться?

9 класс

1. Поезд проходит мост длиной 800 метров за 1 минуту, а мимо наблюдателя — за 15 секунд. Какова длина поезда и его скорость?

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), чьи координаты удовлетворяют условию
$$y^2+y\geqslant x+|x|-1.$$

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x+y+xy=11, \\ x^2+y^2+xy=19. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке M. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Докажите, что двенадцатизначное число, все цифры которого одинаковы, делится на 13.

6. На плоскости заданы две точки. Как с помощью циркуля и линейки построить квадрат, у которого эти точки были бы серединами смежных сторон?

10 класс

1. В гараже стоят 40 автомобилей трех типов: легковые, грузовые и автобусы. Автобусов меньше, чем легковых. Сколько в гараже автобусов, если легковых автомобилей в 12 раз меньше, чем грузовых автомобилей?

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), чьи координаты удовлетворяют условию

$$[x+y]=[x-y].$$

Здесь $[a]$ — целая часть числа a — наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. Имеются две линейки без делений. Длина одной из них — 48 см, а длина другой — 78 см. Можно ли с их помощью построить отрезок длины 54 см? а длины 56 см?

4. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-x^2-x+1$.

5. Можно ли в квадрат со стороной 5 см поместить два непересекающихся правильных треугольника со стороной 4 см?

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между диагональю AB' грани $ABB'A'$ и диагональю BC' грани $BCC'B'$.

Первое задание по физике

Для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным хорошо решить одну-две задачи. Однако после разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами для других классов, а понравившиеся вам задачи — попробовать решить (чем больше, тем лучше). При поступлении в ЗШ вам будут высланы решения всех задач. Познакомьтесь с ними, даже если вы их все решили.

Экспериментальная задача, предназначенная для учащихся всех классов.

1. Налейте в блюдечко немного воды, имеющей комнатную температуру, и аккуратно поставьте в него вверх дном ополоснутый снаружи очень горячей водой тонкостенный стакан. После того как стакан остынет, в него окажется втянутой часть воды (или вся вода) из блюдца. Измерьте относительный перепад давлений вне и внутри стакана $\Delta p/p_a=(p_a-p)/p_a$, где p_a — атмосферное давление воздуха в комнате. Проделайте измерения несколько раз, подумайте над причинами возможного небольшого расхождения результатов измерений.

8 класс

2. Велосипедист пересекает полосу мокрого асфальта шириной l. Колесо велосипеда имеет радиус R. Найдите расстояние между полосой и мокрым следом от колеса.

3. Вес тела в воде в два раза меньше, чем в масле, и в три раза меньше, чем в воздухе. Определите плотность масла.

4. С плавучей платформы поднимают на тросе батискаф объемом $V=4$ м^3. Площадь горизонтального сечения платформы на уровне поверхности воды $S=100$ м^2. На сколько погрузится платформа при полном выходе батискафа из воды?

5. Одна из четырех электроплиток, соединенных так, как показано на рисунке 1, перегорает. Во сколько раз изменится после этого мощность каждой плитки?

6. В весах для измерения массы сыпучих тел на концах легкой линейки длиной $2L$ закреплены чашка и противовес, их массы одинаковы и в сумме дают m_0. Скругленная снизу опора может сдвигаться относительно линейки, пока весы с грузом не окажутся в равновесии при горизонтальном положении линейки. Найдите массу груза, если середина опоры сместится при этом на расстояние l от середины линейки.

9 класс

2. Сосулька падает с крыши дома. Первую половину пути она пролетела за 1 секунду. Сколько времени ей осталось лететь?

3. Для контроля толщины металлической ленты измеряют сопротивление R ее квадратного участка, подсоединяя толстые медные контакты к противоположным сторонам участка. Какова толщина ленты, если удельное сопротивление ее материала ρ?

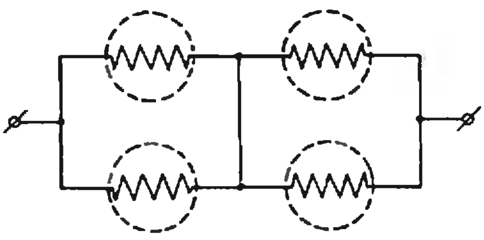


Рис. 1.

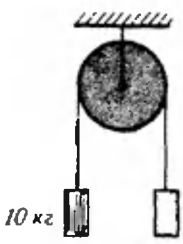


Рис. 2.

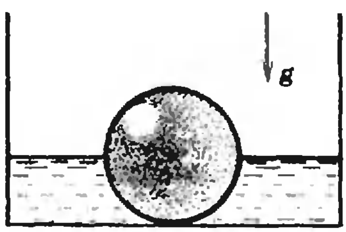


Рис. 3.

4. На какую предельную прочность на разрыв должна быть рассчитана переброшенная через блок веревка, которой поднимают груз массой $m=10$ кг, подвешивая к свободному концу различные грузы (рис. 2)? Массу блока и веревки считайте пренебрежимо малыми.

5. Сила давления шара на дно бассейна при заполнении бассейна водой уменьшилась в два раза, когда уровень воды достиг центра шара (рис. 3). Определите плотность материала, из которого сделан шар.

6. Автомобили движутся колонной со скоростью v_0. На одном и том же участке дороги каждый автомобиль уменьшает скорость от v_0 до v, после чего продолжает двигаться с неизменной скоростью v. При какой наименьшей дистанции между автомобилями они не будут сталкиваться при торможении? Длина каждого автомобиля L.

7. Наполовину закрашенный диск совершает 25 оборотов в секунду. Его снимают кинокамерой, делающей 24 кадра в секунду. С какой частотой будет вращаться диск на киноэкране?

10 класс

2. Горизонтальный ствол винтовки направлен прямо в центр мишени радиусом $r=5$ см. При какой наименьшей скорости вылета пуля попадает в мишень с расстояния $L=100$ м? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. Решите задачу 3 для 9 класса.

4. Решите задачу 4 для 9 класса.

5. Два одинаковых конденсатора заряжены и соединены между собой. Пластины одного из них раздвигают на большое расстояние. Во сколько раз изменится напряжение на другом конденсаторе?

6. Для определения собственного объема сыпучего материала его помещают в цилиндр, который герметически закрывают поршнем. Затем измеряют давления воздуха в цилиндре p_1 и p_2 при одной и той же температуре, но разных положениях поршня, когда суммарный объем воздуха и исследуемого материала равен соответственно V_1 и V_2. Определите объем сыпучего материала по этим данным.

7. Решите задачу 6 для 9 класса.

Ответы, указания, решения

Числа и функции
(см. «Квант» № 6)

3б). Пусть $f(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$.
Докажите, что $n=m$, перепишите f в виде
$$f(x)=\frac{a_0+a_1x^{-1}+\ldots}{b_0+b_1x^{-1}+\ldots}$$
и нарисуйте эскиз графика.

5а). $y=1-x$; $y=2/x$.

5г). Найдите алгебраические уравнения, решениями которых являются рассматриваемые функции, и воспользуйтесь леммой 2.

8. Продифференцировав равенство $a^n(x)+b^n(x)=c^n(x)$, выразите из полученной системы $a^{n-1}(x)$ и $b^{n-1}(x)$. Рассмотрите степени многочленов.

11а). Если функция y является решением алгебраического уравнения, то функция $z=y^2-1$ также удовлетворяет алгебраическому уравнению. Но по условию функция $y^2-1=e^x$ — трансцендентна.

б). Функции $y_1=e^x$ и $y_2=-e^x$ — трансцендентны, а $y_1+y_2=0$ — нет. Функции $y_1=e^x$ и $y_2=e^{-x}$ — трансцендентны, а их произведение $y_1y_2=1$ — нет.

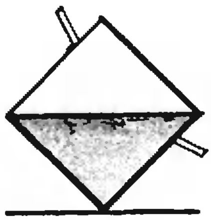
в). Если $y_1=f+g$ и $y_2=fg$ являются обе решениями алгебраических уравнений, то $f, g=(-y_1\pm\sqrt{y_1^2-4y_2})$ также являются решениями алгебраических уравнений.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 6)

Вопросы и задачи

1. Если раскачивание сильное, то сук заметно прогнется, и в нижней точке траектории сиденье качелей станет задевать землю.

2. См. рисунок.



3. Вода, находящаяся в зазоре между склеившимися стеклами, смачивает стекло, и по краям стекол свободная (боковая) поверхность воды вогнута. Силы поверхностного натяжения не дают оторвать стекла друг от друга. Если опустить стекла в воду, то исчезнет вогнутая боковая поверхность водяной прослойки, а вместе с ней — и стягивающие силы поверхностного натяжения.

4. Если пузырек смещен относительно центра, то шарик, положенный на поверхность воды, всегда будет поворачиваться так, чтобы полость находилась в наивысшем положении.

5. Скорость воздуха в струйке тем больше, чем больше давление в матрасе. Но давление во втором случае уменьшается.

6. При одинаковой силе ударов дверь больше деформируется, поэтому амплитуда ее колебаний больше и стук громче.

7. Прокатите смоченный водой мяч по полу и измерьте длину l влажного следа за один оборот. Диаметр мяча равен $d = l/\pi$.

8. Раствор сахара в воде имеет большее поверхностное натяжение, чем чистая вода, и силы поверхностного натяжения «стягивают» спички. При растворении мыла натяжение воды уменьшается.

9. Яркость ткани зависит от ее освещенности, т. е. от угла падения лучей; этот угол различен для разных частей развевающегося флага.

10. Держа в руке кофемолку, вы в момент включения ощутите толчок, стремящийся повернуть ее в сторону, противоположную направлению вращения ротора.

11. Поверхность лужи отражает свет зеркально, поэтому свет фар практически полностью устремляется от водителя; асфальт же рассеивает свет, и часть его попадает в глаз водителя.

12. При переменном токе поднесенный к лампе магнит приведет ее нить в колебательное движение, и очертания нити станут расплывчатыми. При постоянном токе нить будет видна отчетливо, так как она лишь отклонится от начального положения.

13. До закрытия термоса освободившаяся часть его объема заполнилась холодным воздухом; затем, когда термос закрыли, воздух нагрелся, давление его увеличилось, и сила давления вытолкнула пробку.

Поправка

В статье «Основной принцип дифференциального исчисления. Часть II: Свойства производной», опубликованной в № 4 за 1988 год (с. 48—53), пропущена часть текста, и этот пропуск делает текст непонятным. На с. 51 (последняя строка) после слов «из-за уничтожения значащих» должен следовать текст: «цифр. Такие вычислительные задачи называются плохо обусловленными. Рассмотрим такого рода ситуацию в общем виде с привлечением графической иллюстрации (рис. 4). Требуется выяснить, к какому числу приближается отношение», а далее — текст на с. 52.

Кроме того, в формулировке Теоремы на с. 52 должно быть: «Если в каждой точке интервала угловой коэффициент касательной к графику функции (производная) в этой точке», и далее — по тексту.

Редакция приносит извинения читателям и авторам статьи.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Н. С. Кузьмина,
С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова,
П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор О. М. Березина

Сдано в набор 18.05.88. Подписано к печати 24.06.88.
Т-15701. Бумага 70×100/16. Печать офсетная.
Усл. кр.-отт. 22,10. Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 6,39.
Тираж 188 620 экз. Цена 40 коп. Заказ 1229

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Шахматная страничка

ЧЕМПИОН МИРА ЗА КОМПЬЮТЕРОМ

Несколько лет назад в вычислительном центре АН СССР два молодых сотрудника А. Дудоладов и Г. Сенин разработали на компьютере информационно - поисковую систему (ИПС), обладающую многими ценными качествами: компактным хранением текстов партий, удобным способом их ввода, накопления и извлечения по различным запросам, быстрой печатью, возможностью анализа партии с мгновенным возвратом к нужной позиции и т. д. К сожалению, работа не нашла достаточной поддержки. Вскоре в ФРГ была создана более мощная ИПС «Чесс Бейс», реализованная на персональной ЭВМ «Атари». Эту систему можно соединить с шахматным микрокомпьютером, что позволяет вводить тексты партий как с клавиатуры «Атари», так и путем их проигрывания на доске.

Остроумно решаются вопросы поддержки, обновления и сопровождения «Чесс Бейс». Раз в два месяца выходит «журнал»-дискета с доработками программ, инструкциями по их включению в систему и текстами партий важнейших состязаний. На одной дискете помещается до 6 тысяч партий, но в «Чесс Бейс» записываются 2—3 тысячи — оставлено место для комментариев, вариантов и т. д.

В прошлом году создатель «Чесс Бейс» М. Вюлленвебер приезжал в Москву и демонстрировал свое детище в Центральном шахматном клубе. «Можно ли использовать систему для выпуска информационных бюллетеней?» — спросили его на встрече. «Никаких проблем,— улыбнулся автор системы,— возьмем партию, которую все помнят.— На экране во всю ширину появилась запись 24-го, решающего поединка Каспаров — Карпов в Севилье.— Хотите получить текст на английском или немецком языке или же в виде фигурок-пиктограмм?» Присутствующие решили в пользу фигурок; после нажатия пары клавиш на дисплее вместо букв появились изображения фигур.

«Какую ширину текста выбрать?» — и он ограничил столбец с помощью прибора, называемого «мышью». В результате запись автоматически перестроилась на нужную ширину.

«Здесь,— Вюлленвебер показал с помощью «мыши» стрелочкой, — вам нужно вставить комментарий. В записи делаем разрыв и заполняем нужными комментариями. А в этом месте,— стрелочка опять поплыла,— разместим диаграмму...» Запись снова разорвалась, и перед собравшимися появилась диаграмма с позицией после соответствующего хода. В результате была набрана страничка шахматного текста, и спустя двадцать секунд она уже появилась в отпечатанном виде. Если речь идет о турнирном пресс-бюллетене, то с нее можно снять нужное количество копий.

Об этой системе высоко отозвался чемпион мира Г. Каспаров. Подготовка к турнирам и матчам, по его мнению, с помощью «Чесс Бейс» занимает намного меньше времени и может быть проведена более глубоко и основательно. Каспаров и сам несколько раз пользовался этой системой.

В 1986 году в Гамбурге чемпион мира давал сеанс одновременной игры с часами восьми сильнейшим немецким мастерам и проиграл — 3,5:4,5. В следующем году он решил взять реванш у той же «команды». Но предварительно попросил подобрать ему партии соперников за последние два года. Каспаров просидел за «Атари» около трех часов, изучая с помощью «Чесс Бейс» индивидуальность партнеров, их наклонности и стиль игры. Сеанс-реванш принес победу чемпиону мира со счетом 7:1. «Каждого из соперников я знал теперь как своих старых знакомых, знал их и сильные, и слабые стороны»,— так прокомментировал Каспаров свой успех.

Любопытно, что спустя месяц Каспаров дал аналогичный сеанс в Базеле сборной Швейцарии. На сей раз он провел за компьютером около 6 часов и в быстром темпе просмотрел 700 партий будущих противников. Сеанс завершился со счетом 5,5:0,5 в его пользу. И вновь столь убедительный результат чемпион мира объяснил своей прекрасной подготовкой. «Это революция шахматной игры!» — сказал Каспаров, когда он оценил все достоинства «Чесс Бейс».

Заметим, что чемпион мира вообще горячий энтузиаст персональных компьютеров. Не случайно он — президент первого компьютерного клуба в Москве на Рождественском бульваре. А совсем недавно Каспаров провел уникальный сеанс одновременной игры при помощи спутниковой связи и компьютеров. Сам сеансер находился во Франции, в Каннах, а десять его соперников — в разных странах, даже на разных материках. В Москве в компьютерном клубе с чемпионом мира сражался советский участник сеанса — чемпион страны среди юношей М. Улыбин. Он и сделал единственную ничью в этом межконтинентальном представлении. Одну партию Каспаров проиграл, общий результат сеанса — 8,5:1,5 в его пользу. Блестящий результат, если учесть, что все участники сеанса — мастера, а двое — даже международные.

Вот одна из партий этого сеанса, которую чемпион мира быстро выиграл у итальянского мастера из Милана.

Г. Каспаров — Э. Арланди
Английское начало

1. c4 c5 2. Kf3 Kc6 3. d4 cd 4. K:d4 Kf6 5. Kc3 e6 6. g3 Cb4 7. Cg2 0—0 8. 0—0 d5 9. cd ed 10. Cg5 C:c3 11. bc Ce6 12. Лb1 Ka5 13. Лb5 a6 14. C:f6 gf 15. Лb4 Лc8 16. e4 de 17. C:e4 f5 18. C:f5 C:f5 19. K:f5 Ф:d1 20. Л:d1 Л:c3 21. Лd7 Лf3 22. Лd5 b5 23. a4 Лb3 24. Лg4+ Kph8 25. Kh6 Kc6 26. Лf5. Черные сдались.

Е. Я. Гик

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Перед вами кольцо, состоящее из десяти правильных тетраэдров. Оно склеено из плотной бумаги и может изгибаться и выворачиваться до бесконечности, все время меняя свою форму. Здесь изображены четыре последовательные фазы его вращения. Обратите внимание на то, что каждая пара соседних тетраэдров имеет общее ребро, и при выворачивании кольца тетраэдры совершают колебания вокруг этого ребра. А пятиугольная звезда, периодически возникающая внутри кольца, при каждом последующем появлении оказывается повернутой на 36°. О том, как сделать такое кольцо, вы можете прочитать в статье «Флексагоны, флексоры, флексманы». Развертка кольца представлена там на рисунке 15. Рекомендуемый размер ребер тетраэдров — 3,5 см. Не пожалев времени, тщательно разметьте развертку и раскрасьте ее в два своих самых любимых цвета. После этого вырежьте ее и, следуя указаниям, данным в статье, аккуратно склейте. Проделав все это, вы станете обладателем игрушки, которая, попав в ваши руки, мгновенно оживает.